Satz 20.2 $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt, $c \in \mathbb{R}$

Äq

(i) $\exists$ Treppenfkt $\underline{f}_k, \overline{f}_k : I \to \mathbb{R}$

$$\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k \quad \text{alle } k$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \underline{f}_k \, dx = c = \int_I \overline{f}_k \, dx$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z$ Weite $Z \leq \delta \Rightarrow$

$$\forall \xi \quad |c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Gitter $Z \; \forall \xi$

$$|c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$$

$$c = \int_I f \, dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) \, d(x_1, \dots, x_n)$$

f Riemann integrierbar

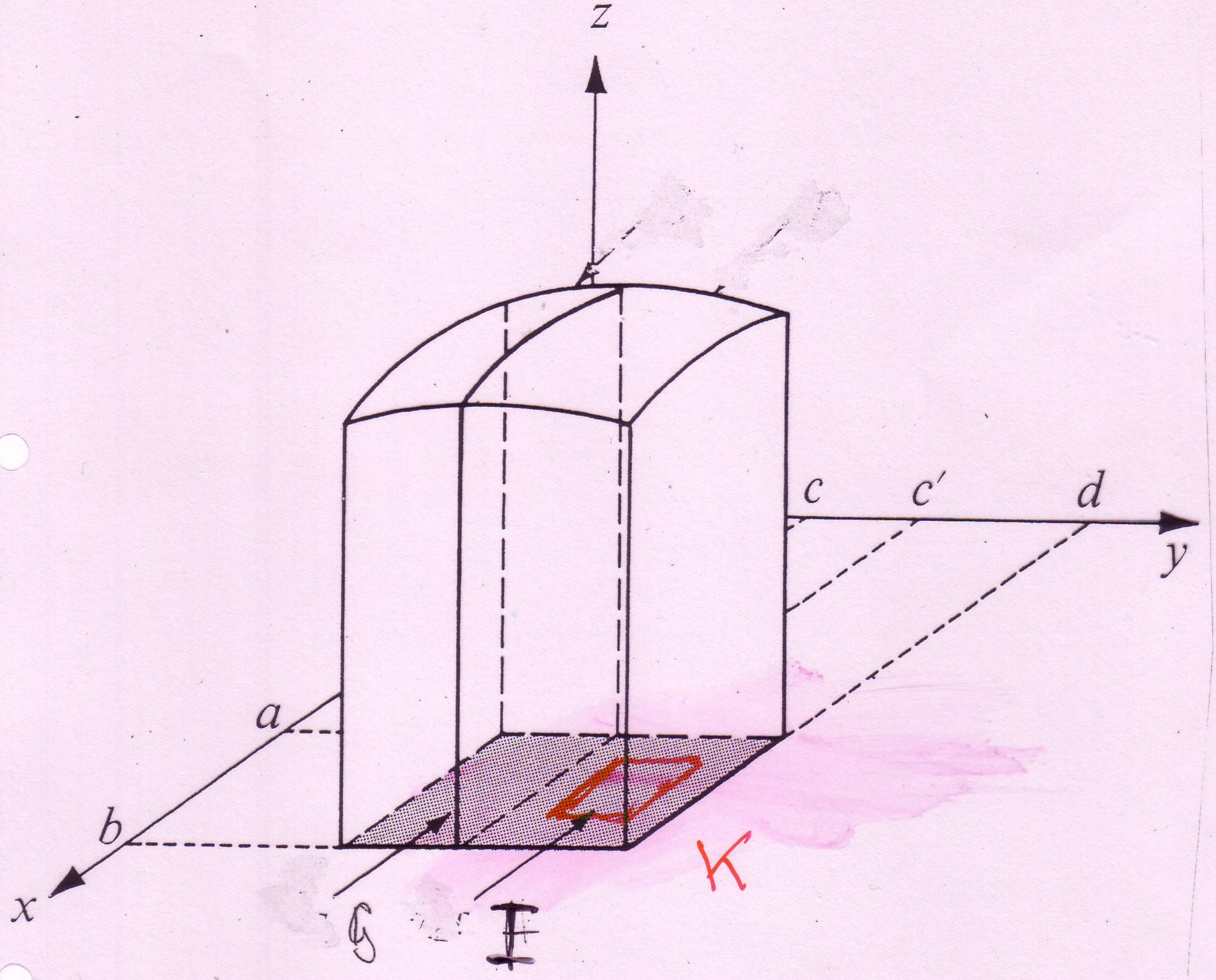
Korollar $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

f Riemann integrierbar $\Rightarrow$

$\exists$ Treppenfkt $\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k$

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \overline{f}_k - \int_I \underline{f}_k = 0$$

20.1.7 Additivität



$$H = G \cup \mathbb{I} = G \oplus \mathbb{I}$$

$$\int_H f = \int_G f + \int_{\mathbb{I}} f$$ additiv

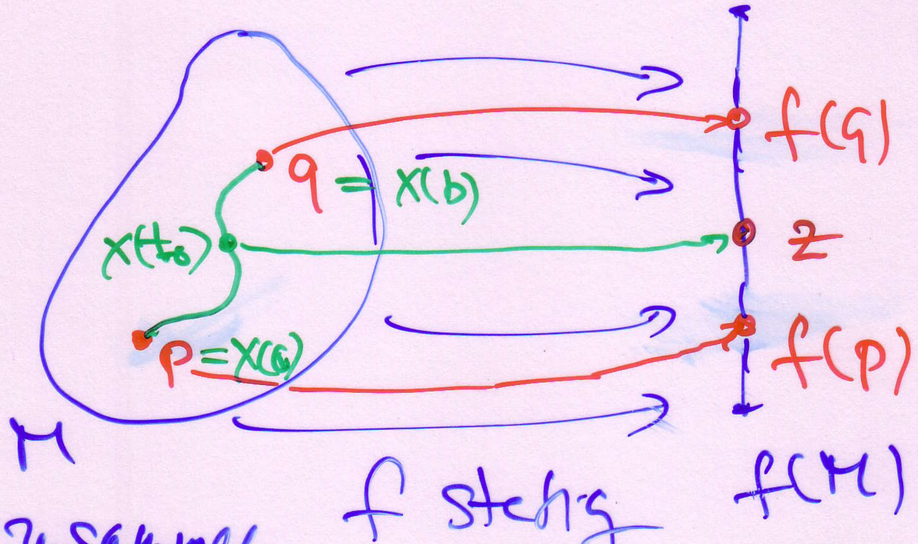
falls diese existieren

$\int_{\mathbb{I}} f$ ex $\Rightarrow$ $\int_K f$ existiert

Bew. oBdA $f \geq 0$

20.2 Integrale stetiger Funktionen

20.2.1. Zwischenwertsatz



wegzusammenhängend kompakt $\Longrightarrow$ $f(M)$ kompaktes Intervall

Theorem 20.9 Summationstheorem. *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle Intervalle $[c,d] \subseteq I$ von Weite $\leq \delta$ und alle $\xi \in [c,d]$ gilt

$$|\int_{[c,d]} f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)\mu([c,d])| \leq \varepsilon\mu([c,d])$$

(ii) Mittelwertsatz*:*
Es gibt $\xi \in I$ mit $\int_I f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\mu(I)$

(iii) Sei $W[(c,d)]$ für alle $[c,d] \subseteq I$ definiert und additiv. Gelte weiterhin

(*) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle (regelmäßigen) $[c,d] \subseteq I$ von Weite $\leq \delta$ gilt

Es gibt $\xi \in [c,d]$ mit
$$|W([c,d]) - f(\xi)\mu([c,d])| \leq \varepsilon\mu([c,d])$$

Dann gilt für alle $[c,d] \subseteq I$:

$$W([c,d]) = \int_{[c,d]} f(x)\mathrm{d}x$$

20.2.3 Satz von Fubini

$I_x \subseteq \mathbb{R}^k$, $I_y \subseteq \mathbb{R}^l$ kompakte Intervalle

$f: I_x \times I_y \to \mathbb{R}$ stetig

$z = f(\vec{x}, \vec{y}) \quad \vec{x} \in I_x, \; \vec{y} \in I_y$

$\Longrightarrow$

$g: I_y \to \mathbb{R}$ stetig

$g(\vec{y}) = \int_{I_x} f(\vec{x}, \vec{y}) \, d\vec{x}$

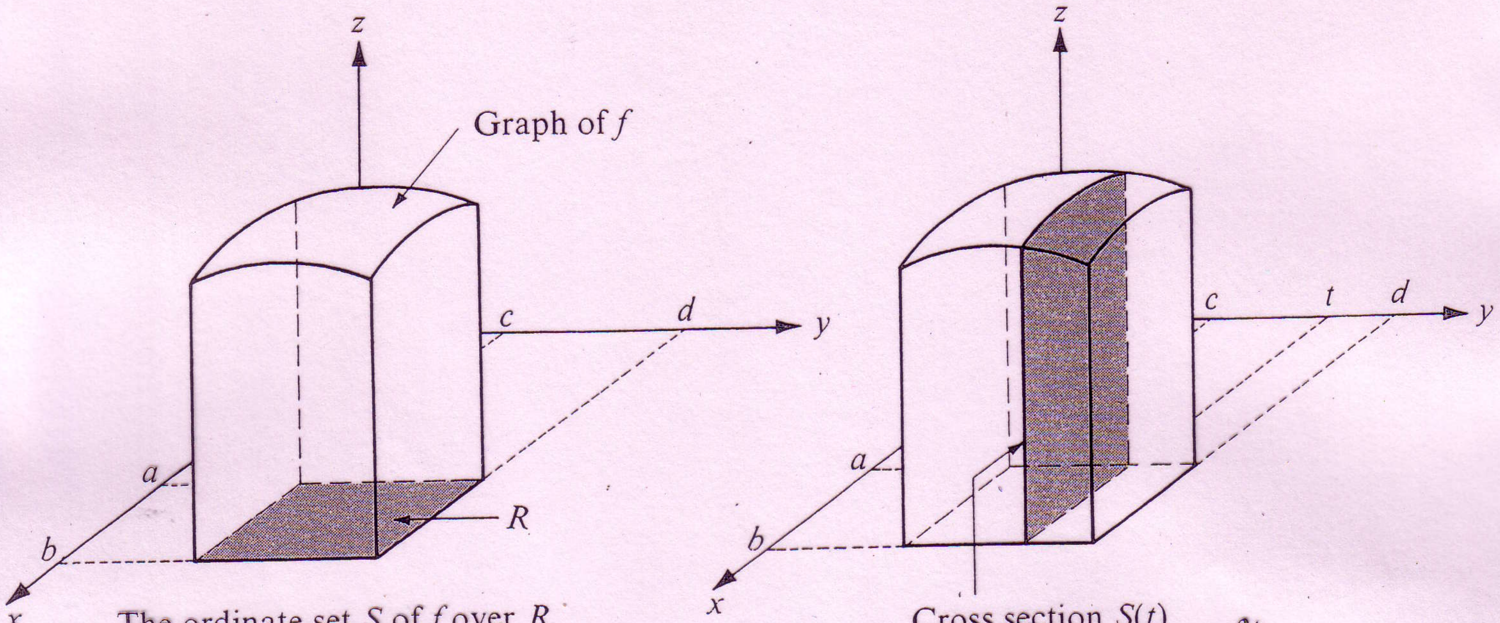
$$\int_{I_y} g(\vec{y}) \, d\vec{y} = \int_{I_x \times I_y} f(\vec{x}, \vec{y}) \, d(\vec{x}, \vec{y})$$

$h: I_x \to \mathbb{R}$ stetig

$h(\vec{x}) = \int_{I_y} f(\vec{x}, \vec{y}) \, d\vec{y}$

$$\int_{I_x} h(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{I_x \times I_y} f(\vec{x}, \vec{y}) \, d(\vec{x}, \vec{y})$$

Beispiel $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} x y^2 \, d(x,y)$



The ordinate set S of f over R

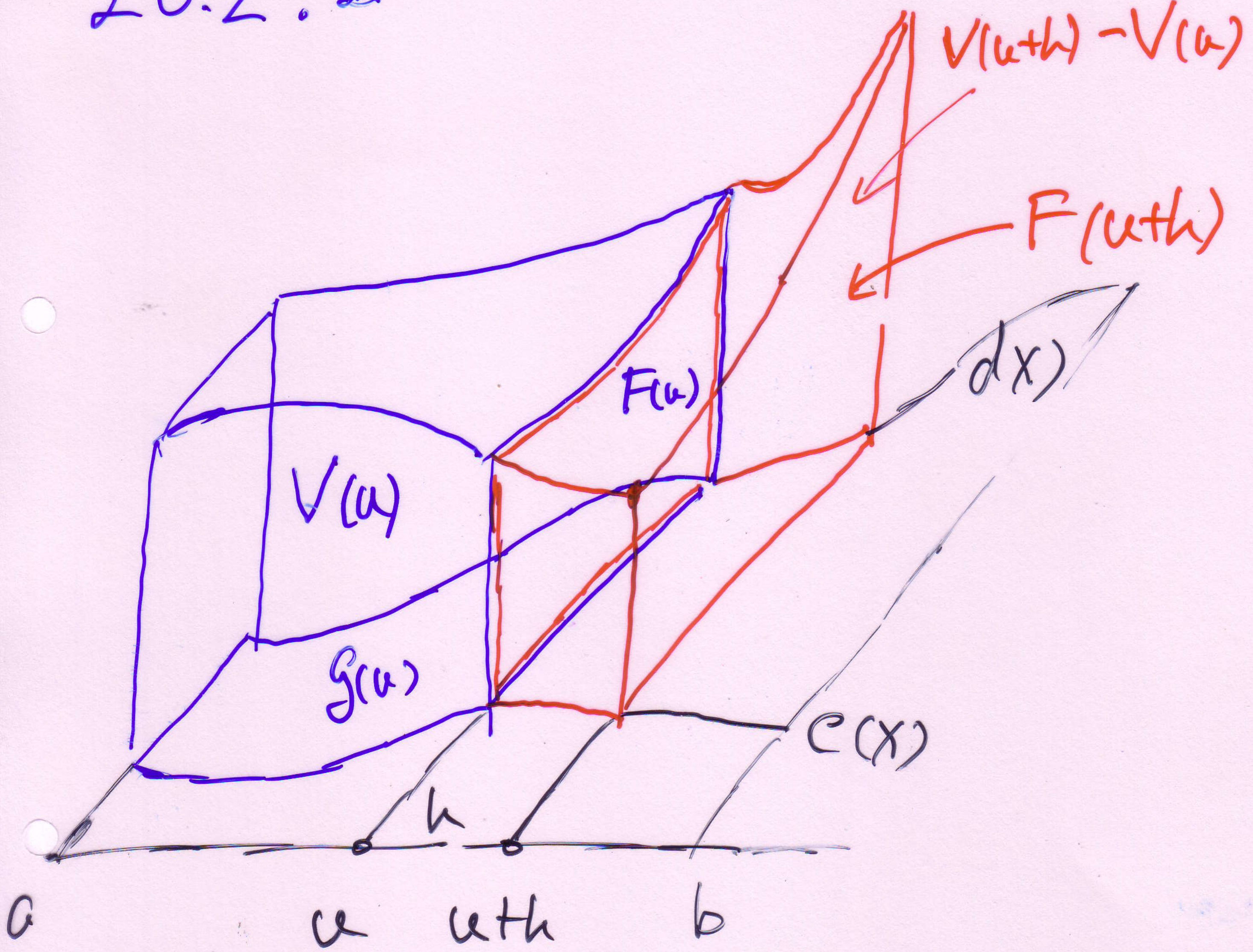
(a)

Cross section $S(t)$
with area $g(t) = \int_a^b f(x, y)\, dx$

(b)

FIGURE 2.4 *The volume of S is the integral of the cross-sectional area:* $V(S) = \int_c^d g(t)\, dt$.

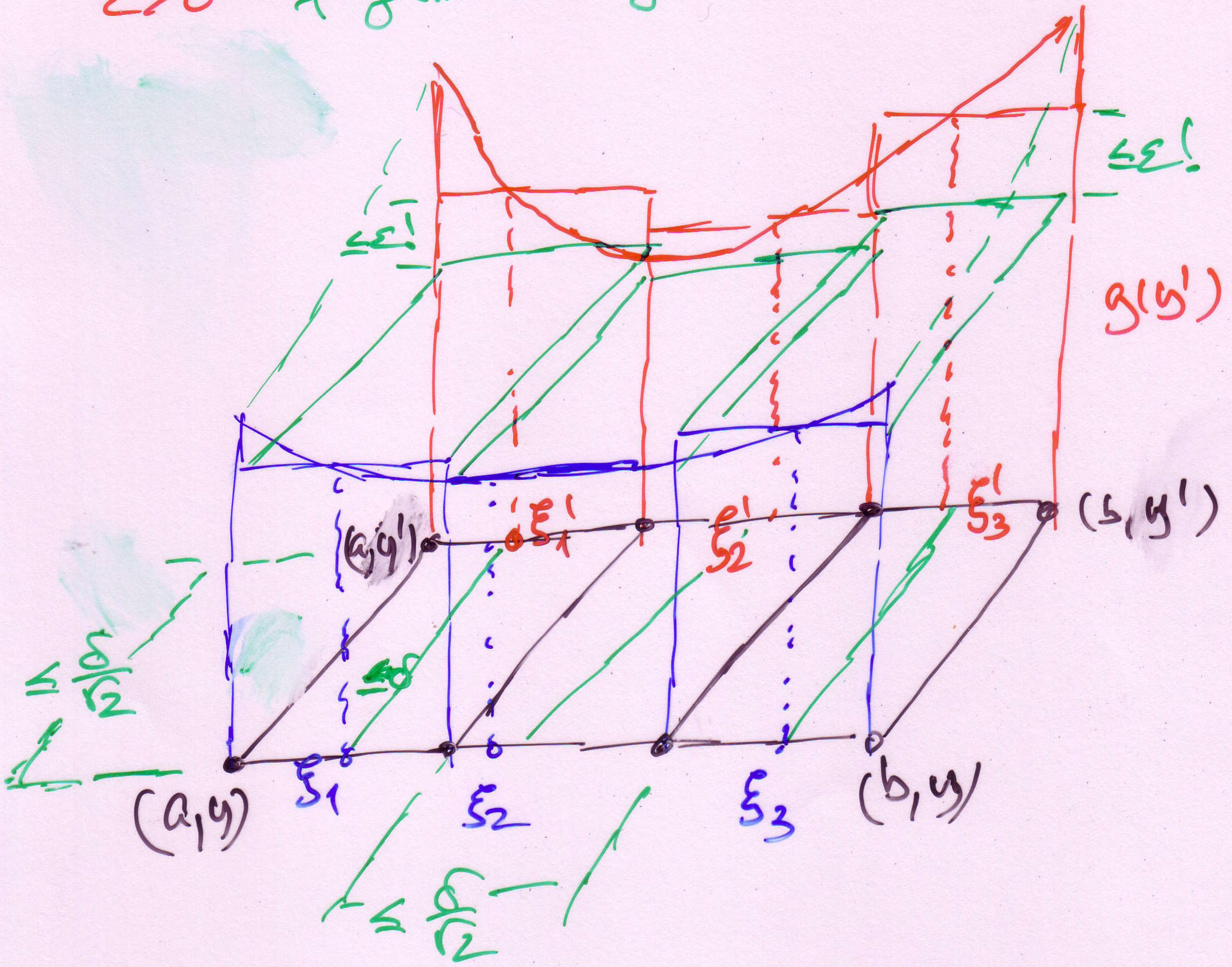
20.2.2



$$\frac{V(u+h)-V(u)}{h} \longrightarrow F(u) = \frac{dV}{du}$$

$$\Rightarrow \int_G f\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f\,dy\right)}_{F(x)} dx$$

$\varepsilon > 0$ f glm stetig $\rightsquigarrow$ $\delta > 0$

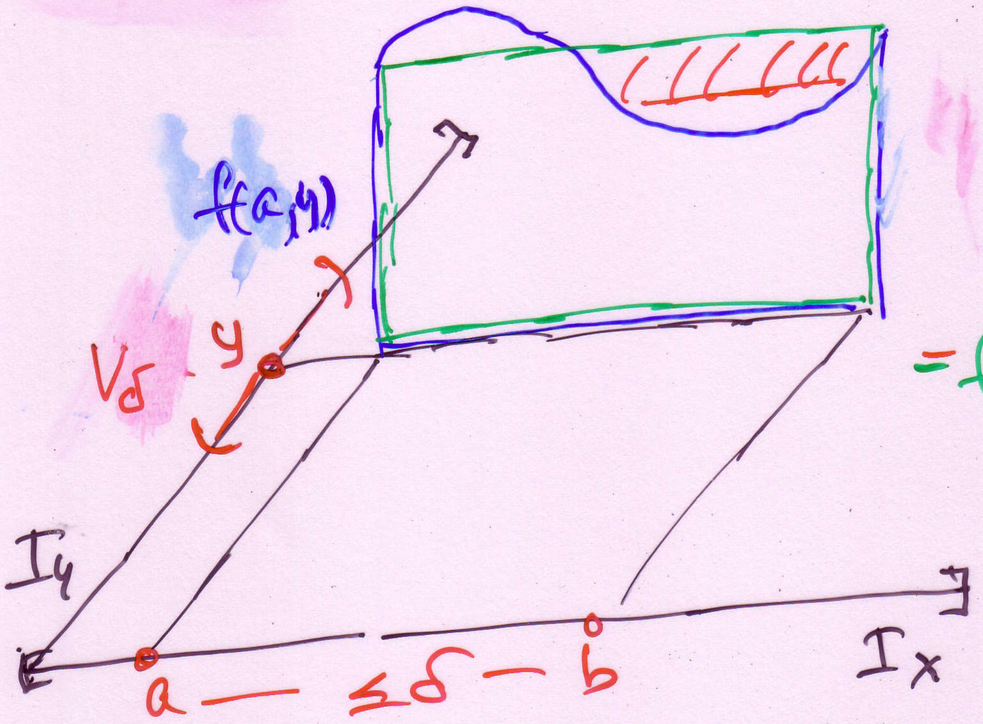


$\Rightarrow |g(y') - g(y)| \leq \varepsilon(b-a)$

$\Rightarrow$ g(y) stetig

$\boxed{\varepsilon > 0}$

$$V_\delta = \left\{ y \in I_y \mid b-a<\delta \Rightarrow \int_a^b f(x,y)\,dx = f(a,y)(b-a) \pm \varepsilon(b-a) \right\}$$



$$\int_a^b f(x,y)\,dx = f(a,y)(b-a) \pm \varepsilon(b-a)$$

Summationstheorem!

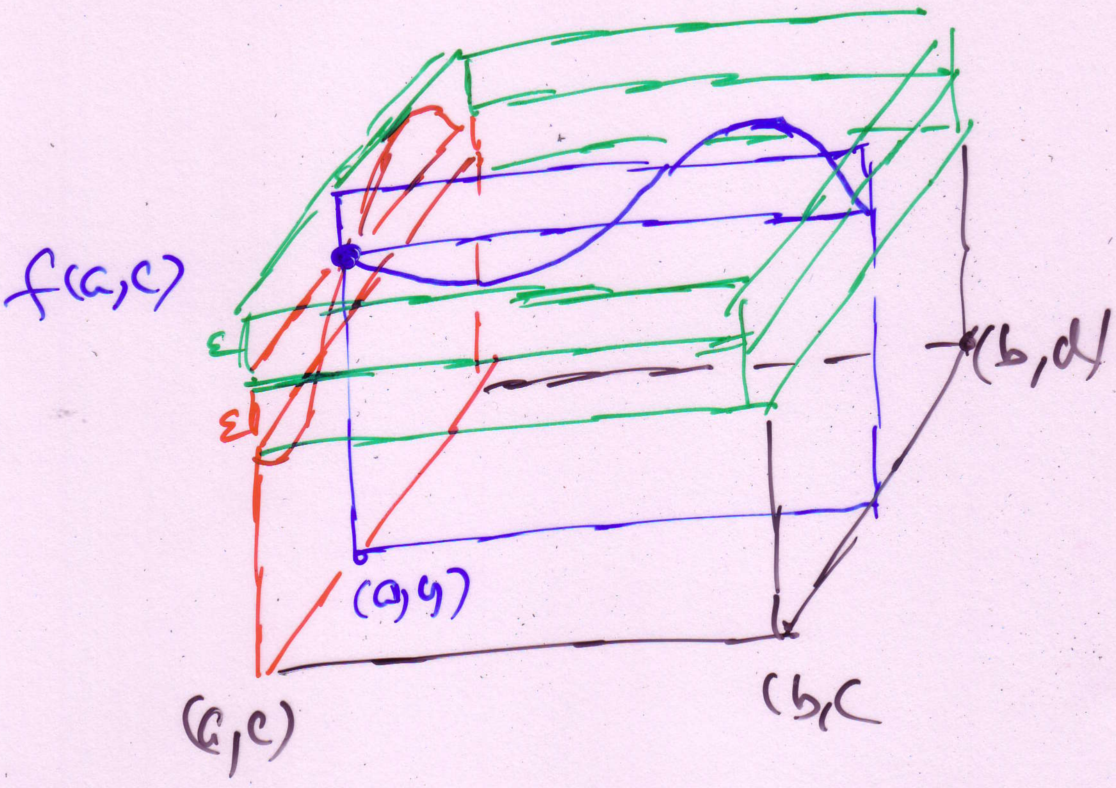
$$I_y = V_{\delta_1} \cup \dots \cup V_{\delta_r}$$

$$\delta' = \min \delta_j$$

Summationstheorem: δ''

$$d-c<\delta'' \Rightarrow \int_c^d f(a,y)\,dy = f(a,c)(d-c) \pm \varepsilon(d-c)$$

$$\delta := \min\{\delta', \delta''\}$$



$$W([a,b]\times[c,d]) := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

additiv

$$= \left(f(a,c) \pm 2\varepsilon \right)(b-a)(d-c)$$

$$\overset{!}{=} \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d(x,y)$$

Summationstheorem!

$$W([a,b]\times[c,d]) :=$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

$$= \int_c^d \big(f(a,y) \pm \varepsilon\big)(b-a)\,dy$$

$$= \left(\int_c^d f(a,y)\,dy\right)(b-a) \pm \varepsilon(b-a)(d-c)$$

$$= \big(f(a,c)(d-c) \pm \varepsilon(d-c)\big)(b-a) \pm \varepsilon(b-a)(d-c)$$

$$= \big(f(a,c) \pm 2\varepsilon\big)(b-a)(d-c)$$

W additiv

Summationstheorem $\Rightarrow$

$$W([a,b]\times[c,d]) = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d(x,y)$$

$\square$