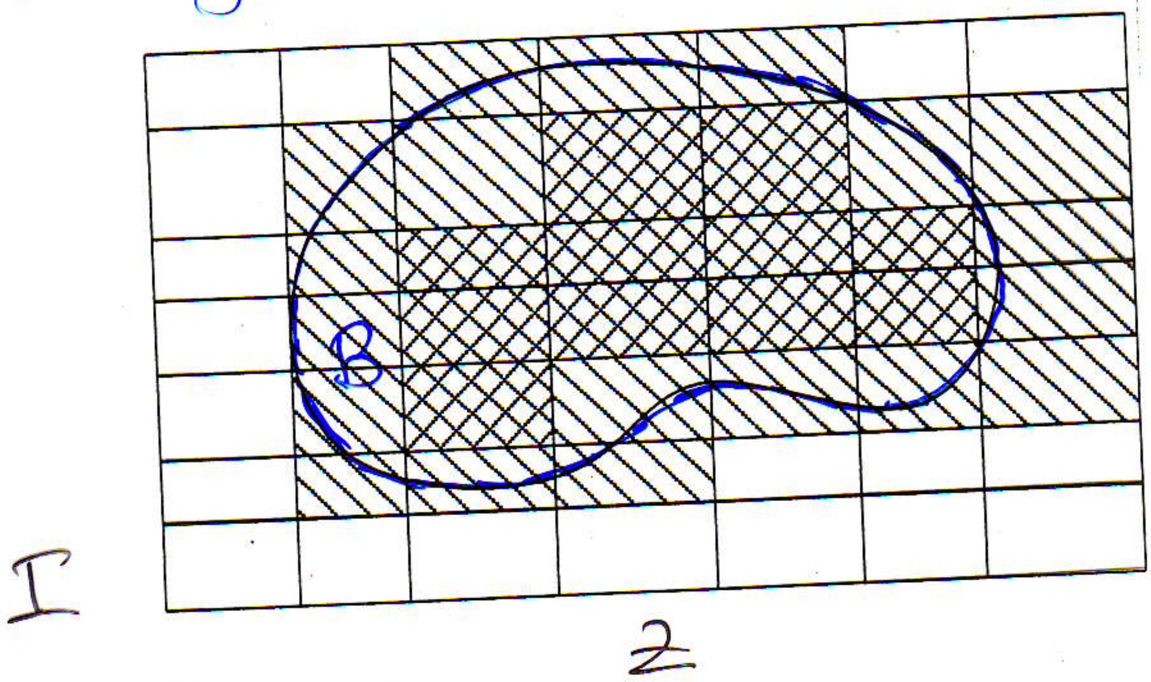
21.1 Jordan messbare Mengen



$B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt

$$U(I,Z,B) = \sum_{J \in Z,\ J \subseteq B} \mu(J)$$ 

"inneres" Inhalt

$$\leq O(I,Z,B) = \sum_{J \subseteq Z,\ J \cap B \neq 0} \mu(J)$$

"äußerer" Inhalt

B (Jordan) messbar

$$\iff \exists \underset{B}{\overset{I}{\cup\!|}},\ Z_n \quad \lim_{n\to\infty} O(I,Z_n,B) - U(I,Z_n,B) = 0$$

Maß $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} U(I,Z_n,B)$

$\Longleftrightarrow$ charakteristische Funktion

$\chi_B : I \to \mathbb{R}$ $\quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$

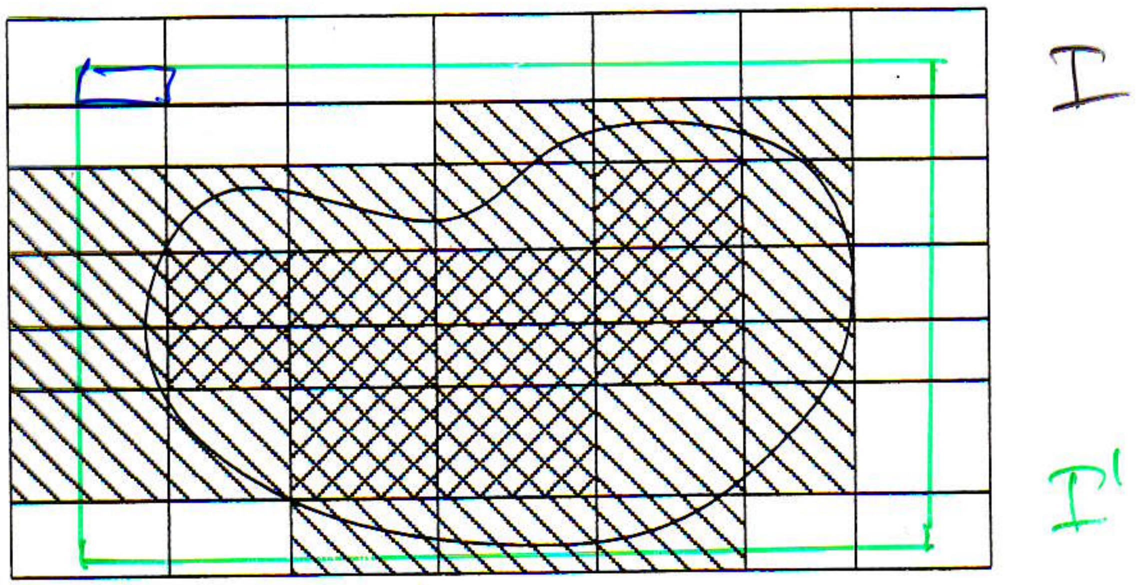
integrierbar, $\mu(B) = \int_I \chi_B(x)\, dx$

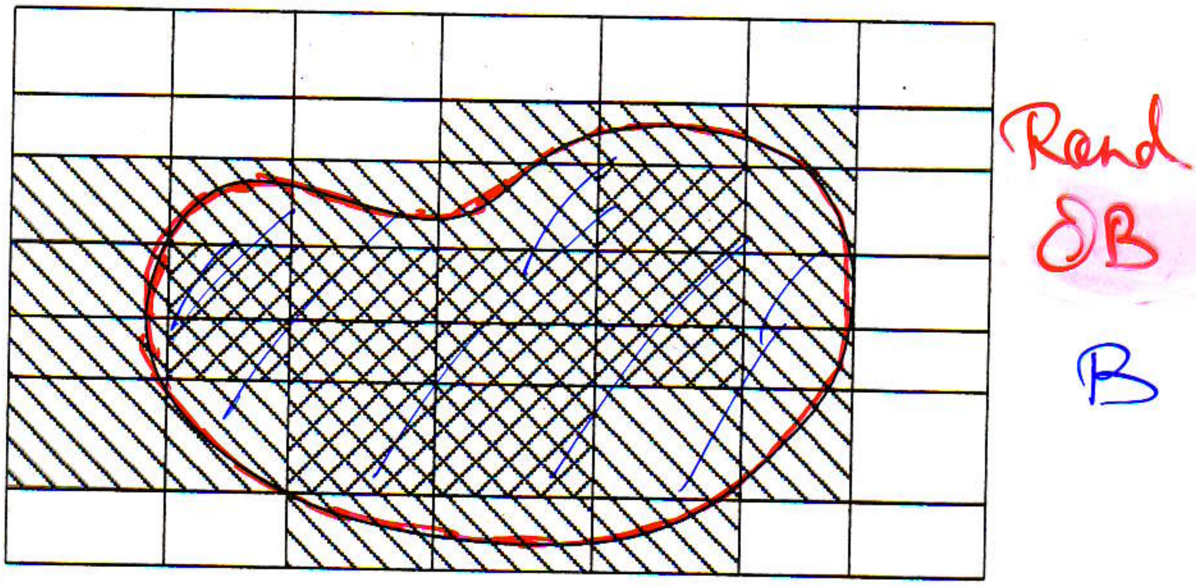
Folgerung: unabh. von Z_n

jede Folge Z_n mit Weite $Z_n \to 0$

Behauptung: unabh. von I

Beweis oBdA $I' \subseteq I$





Satz: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt

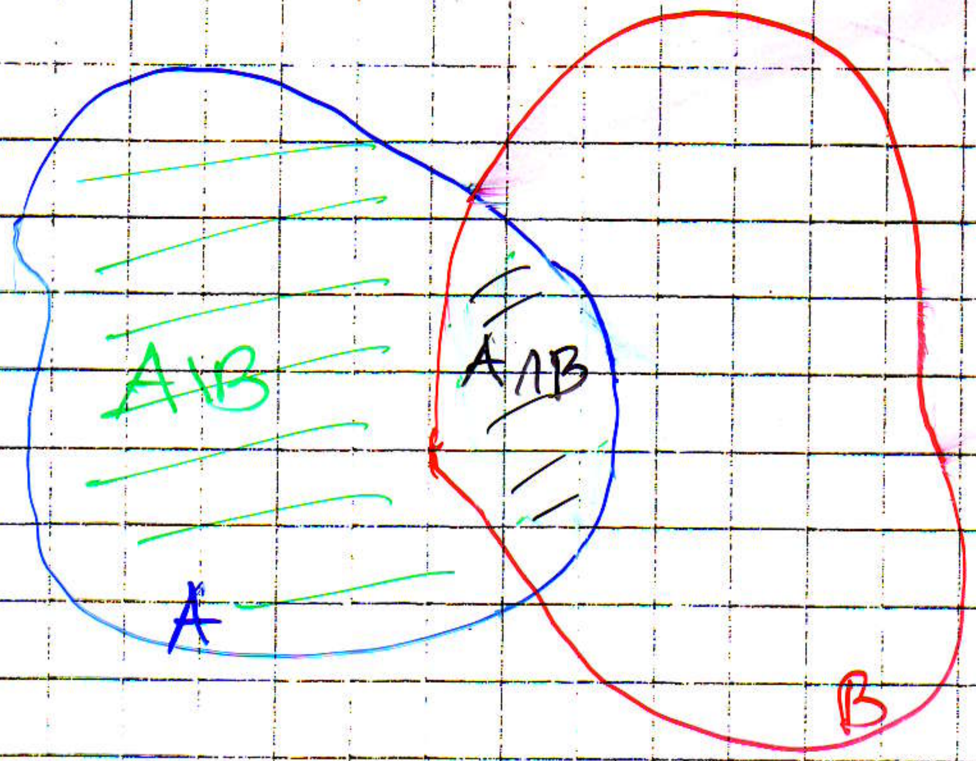
B messbar $\Longleftrightarrow$ ∂B messbar

$\mu(\partial B) = 0$

Def B Nullmenge

$\Longleftrightarrow \mu(B) = 0$

-1



Satz 21.4 A, B messbar

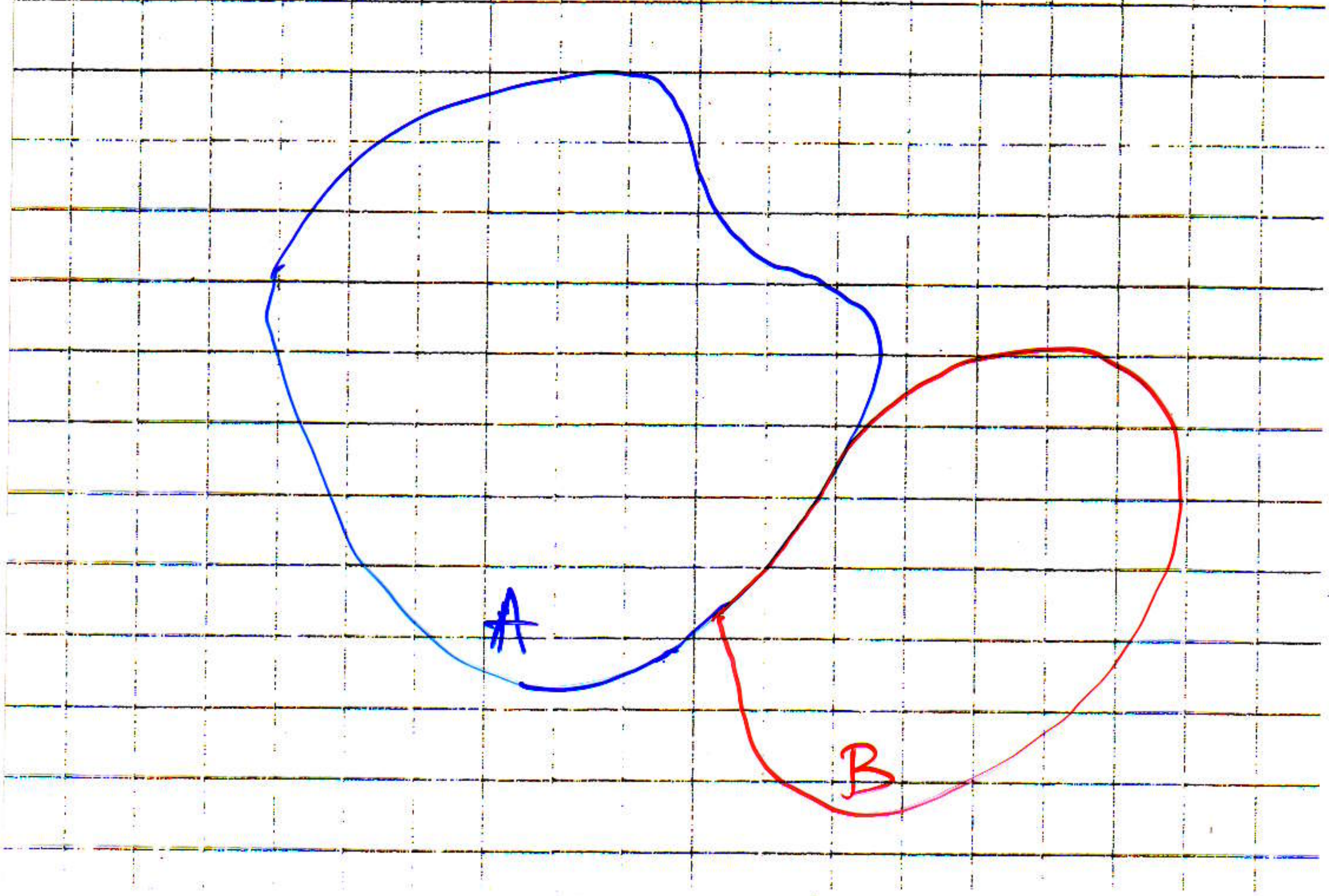
$\Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ messbar

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$$

Beweis. Weite $Z_n \to 0$

für $A \cap B$: doppelt gezählt

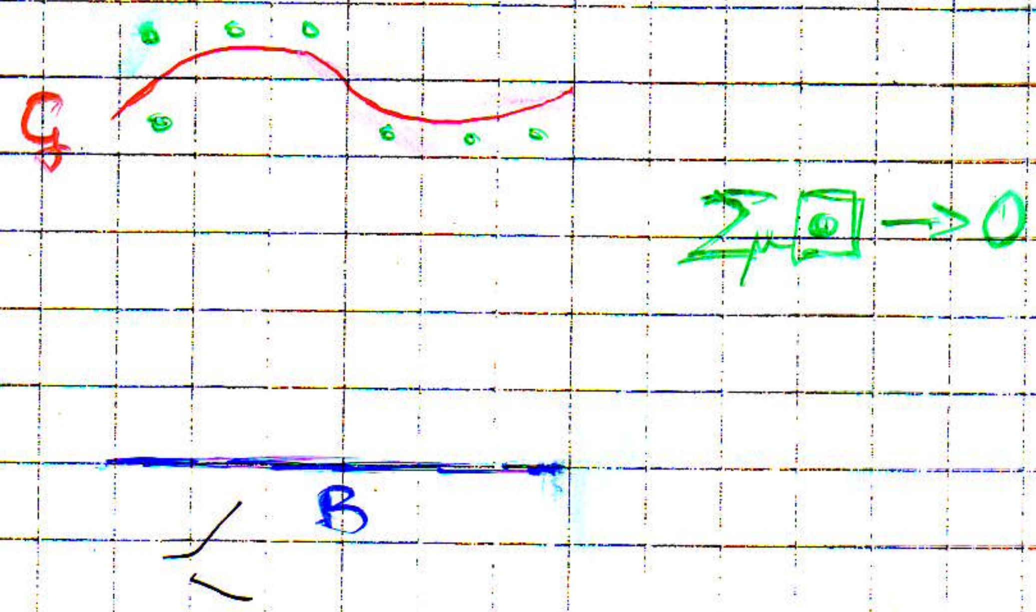


A, B nicht überlappend

$$\iff A \cap B \subseteq \partial A \cap \partial B$$

$$\rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Bew $\mu(A \cap B) = 0$



21.6.

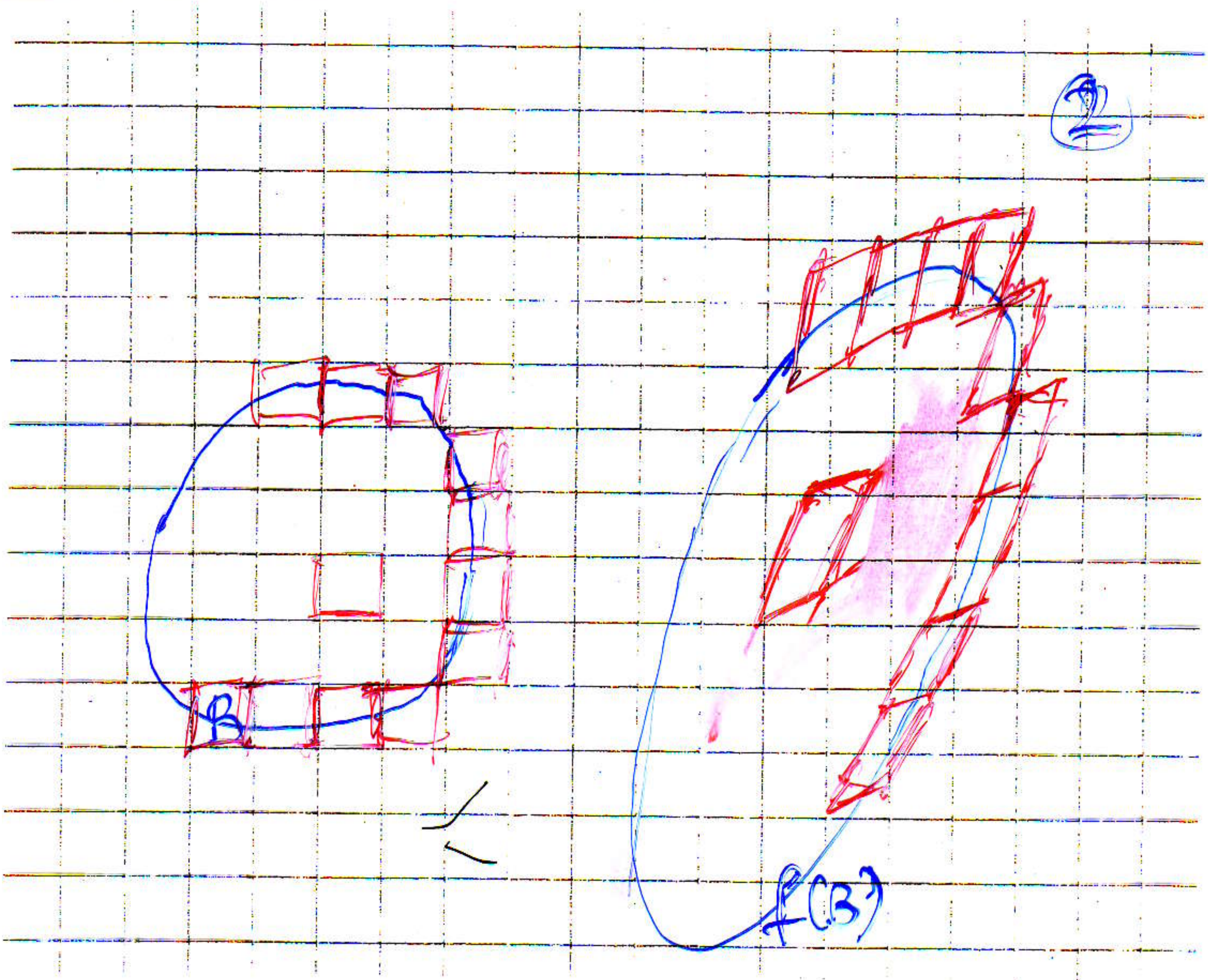
Satz B messbar, $f : B \to \mathbb{R}$

$G = \text{Graph } f = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$

f integrierbar $\Longleftrightarrow$

G messbar, $\mu(G) = 0$

Nullmenge



$f: B \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig

$\exists L \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$

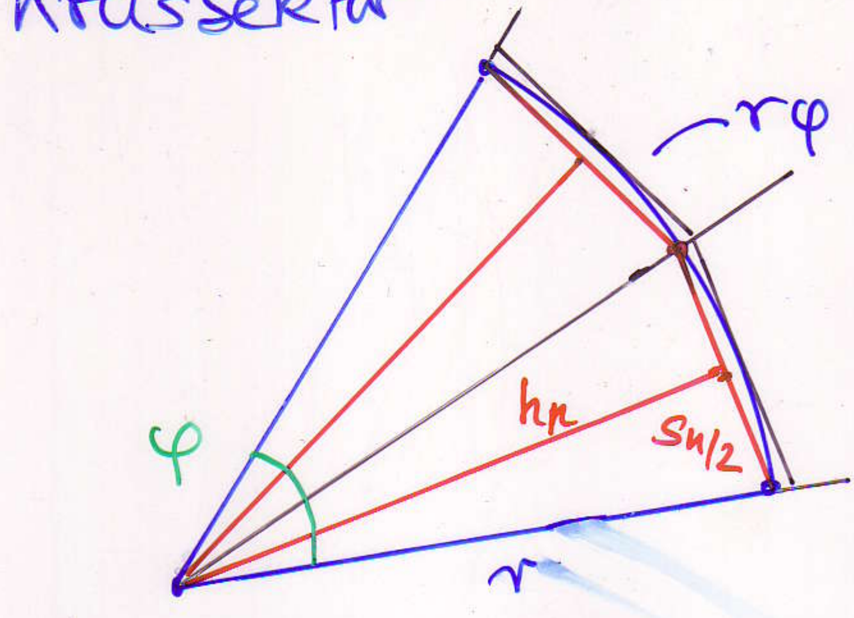
Satz B Nullmenge

$\Rightarrow f(B)$ Nullmenge

Es gibt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig

$f[0,1] = [0,1] \times [0,1]$ Peano

Kreissektor



Zerlegung

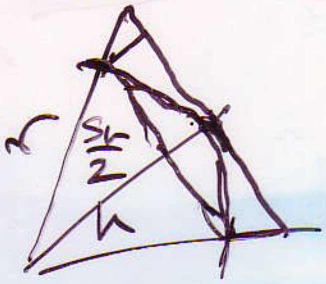
Z_n

n Dreiecke

$h_n \cdot s_n/2$

n Trapeze

$$s_n(r-h_n) + \frac{s_n}{2h_n}(r-h_n)^2$$



$$O(Z_n,B) - U(Z_n,B) =$$

$$\underbrace{n s_n}_{\to\, r\varphi} \underbrace{(r-h_n)}_{\to\, 0} + \underbrace{\frac{n s_n}{2h_n}}_{\to\, \varphi/2} \underbrace{(r-h_n)^2}_{\to\, 0} \longrightarrow 0$$

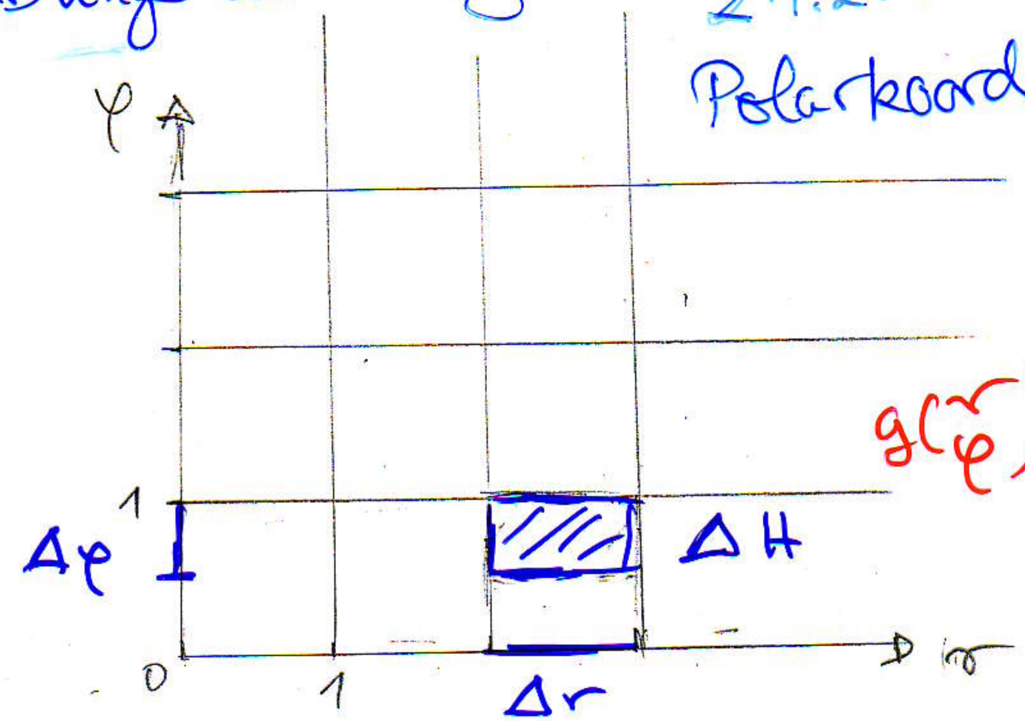
$$U(Z_n,B) = n\, h_n \frac{s_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{h_n}_{\to\, r} \underbrace{n s_n}_{\to\, r\varphi} \to \frac{1}{2} r^2 \varphi$$

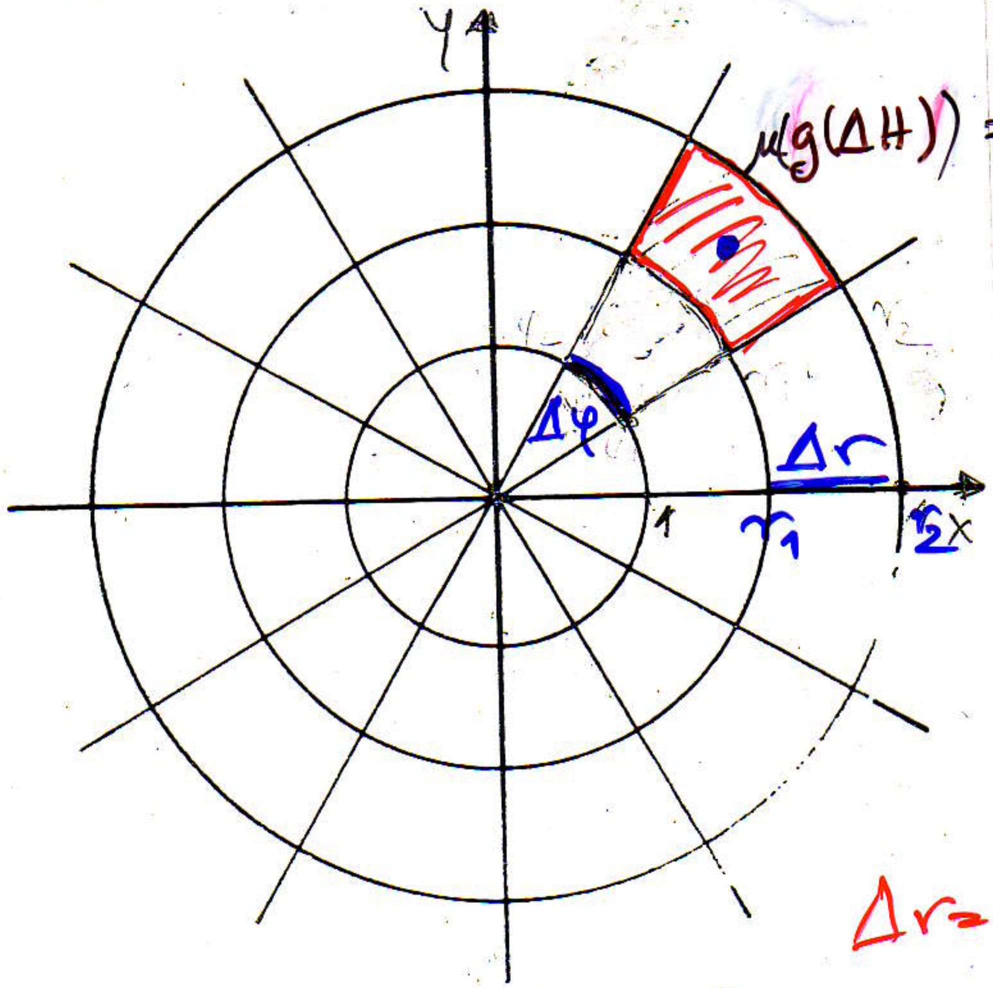
Übungseinteilung → Netz

21.2.1

Polarkoordinaten



$g\binom{r}{\varphi} = r\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$



$\mu(g(\Delta H)) = r\mu(\Delta H)$

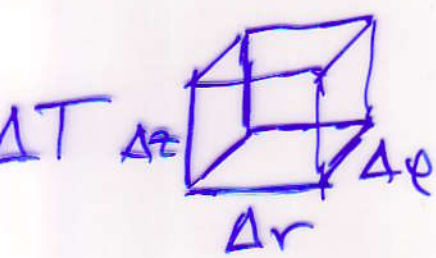
$\Delta r = r_2 - r_1$

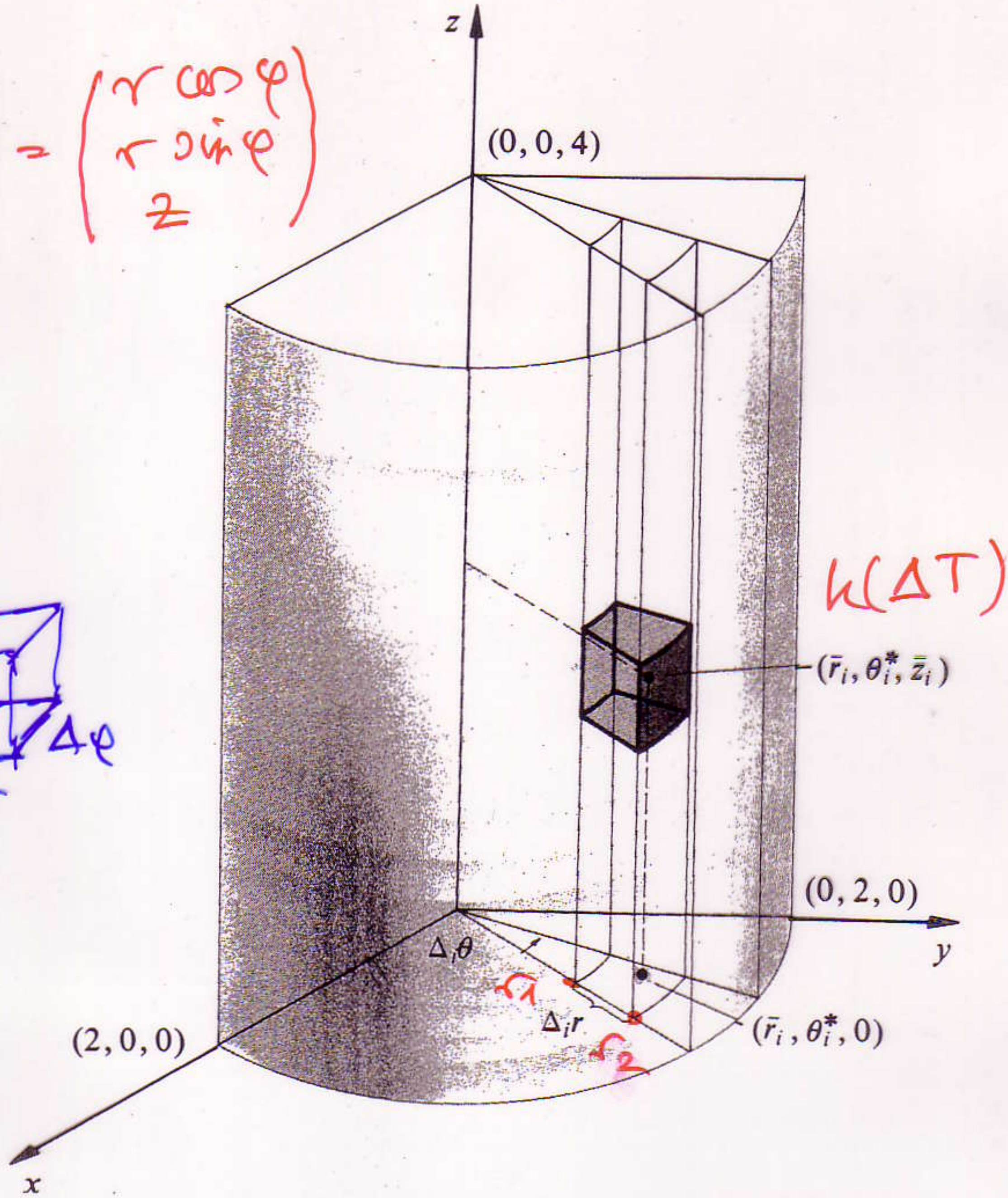
$$\mu(g(\Delta H)) = \frac{1}{2}\Delta\varphi r_2^2 - \frac{1}{2}\Delta\varphi r_1^2$$
$$= r\,\Delta\varphi\,\Delta r \quad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

3. Binomi

21.2.1 Zylinderkoordinaten

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$





$$\mu(h(\Delta T)) = \bar{r}\,\Delta\varphi\,\Delta r\,\Delta z$$

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

21.3 Z Zerlegung von B

- Z endliche Menge von Zellen C
  - C kompakt, messbar
  - $B \subseteq \bigcup_{C \in Z} C$ beschränkt
  - nicht überlappend

$$U(Z,B) = \sum_{C \in Z,\, C \subseteq B} \mu(C)$$

$$O(Z,B) = \sum_{C \in Z,\, C \cap B \neq \emptyset} \mu(C)$$

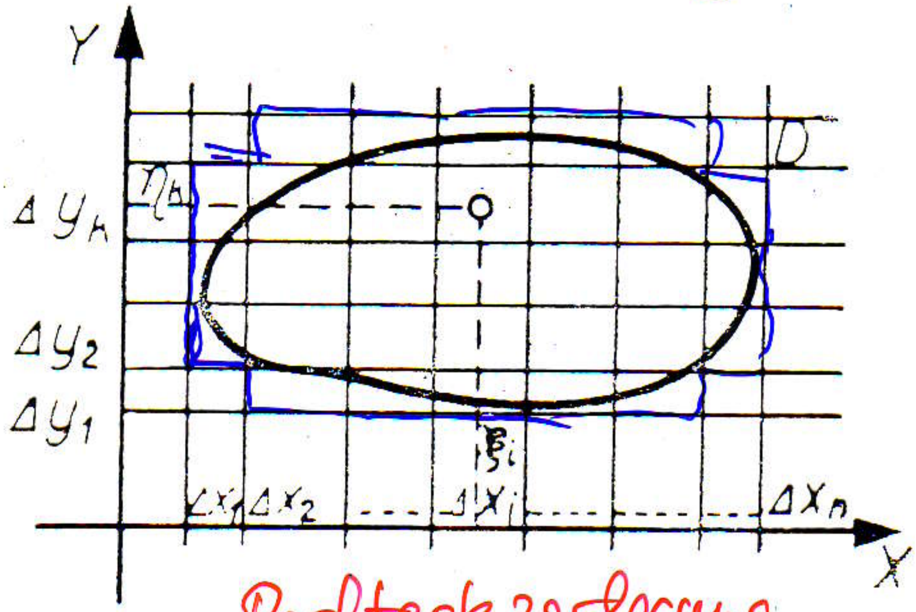
Satz B messbar $\iff \exists\, Z_n$

$$\lim_{n\to\infty} O(Z_n,B) - U(Z_n,B) = 0$$

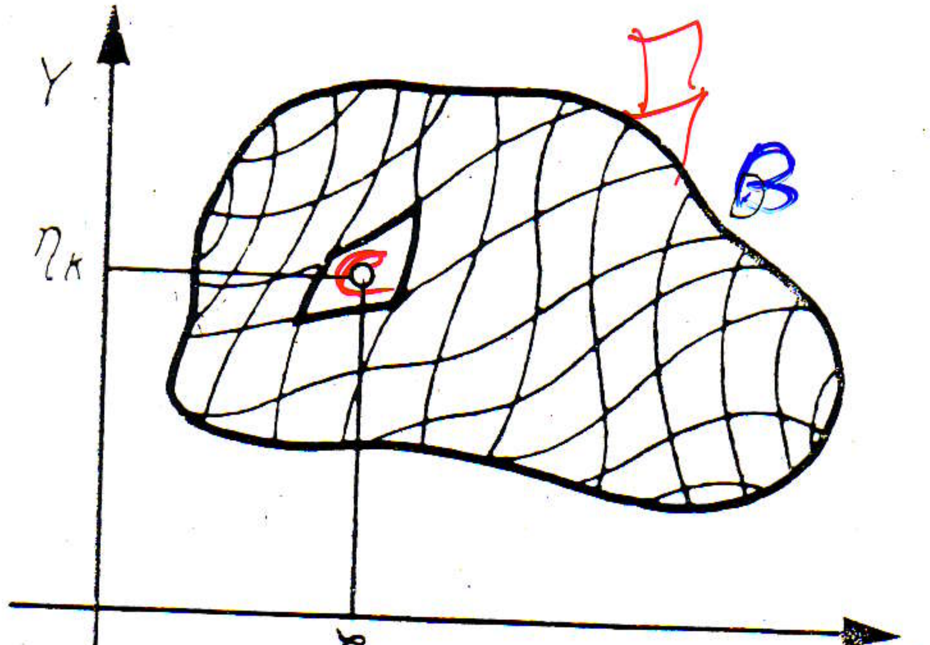
Dann $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} U(Z_n,B)$

6b

21.3.1 Zerlegungen



Rechteckzerlegung
sogar Gitterzerlegung



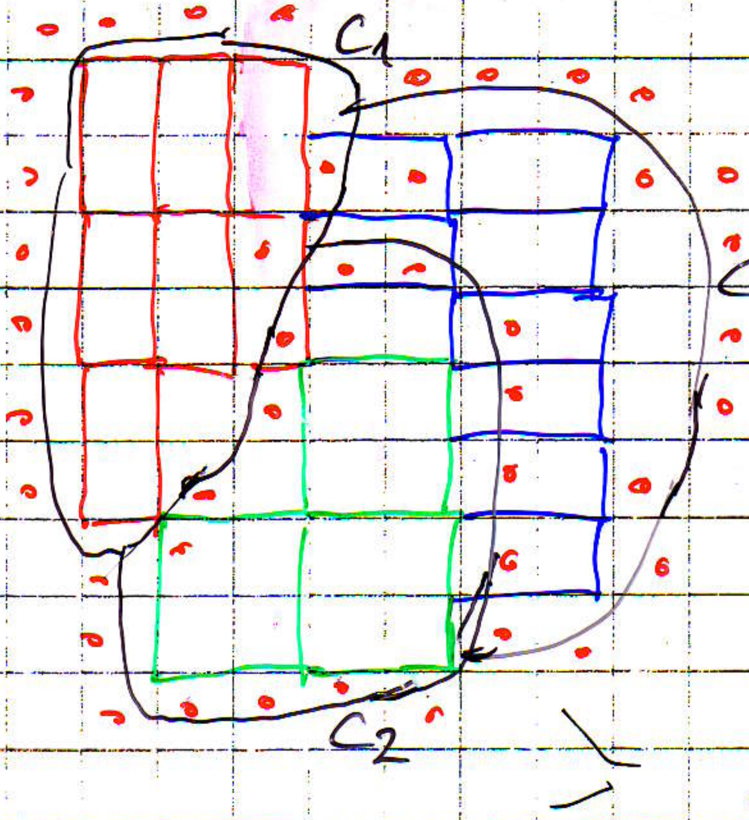
Zerlegung Z

$C \in Z$

$B \subseteq \bigcup C$ beschränkt

~~C~~ $\in Z$

$Z: C_1, C_2, C_3$



$\sum \boxed{\bullet} < \varepsilon$

Lemma Zu jeder Zerlegung Z von B und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Gitterzerlegung Z^ε

$$\sum_{\underbrace{J \in Z^\varepsilon - Z}_{J \not\subseteq C \text{ alle } C \in Z},\ J \cap B \neq \emptyset} \mu(J) < \varepsilon$$

Bew Z_C Gitterzerlegung von $C \in Z$

$$O(Z_C, C) - U(Z, C) < \varepsilon / |Z|$$

Kor $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Bewegung

$\|\varphi(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

B messbar $\Rightarrow$ $\varphi(B)$ messbar

$$\mu(\varphi(B)) = \mu(B)$$

Bew: Z_n Gitter-Zerlegung von B

$\Rightarrow$ $\varphi(Z_n)$ Zerlegung von $\varphi(B)$

$\varphi(C)$ Rechteck für $C \in Z_n$

kongruent C

also $\mu(\varphi(C)) = \mu(C)$

21.4 Z Zerlegung von B

$f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt

f Treppenfunktion $\Leftrightarrow$ konstant auf dem Inneren von C $\forall C \in Z$

Zwischenvektor ξ: $\xi_C \in C \cap B$

Riemann-Summe

$$R(Z, \xi, f) = \sum_{C \in Z} f(\xi_C)\,\mu(C)$$

f Treppenfkt $\Rightarrow \int_B f = R(Z, \xi, f)$

Untersumme $U(Z,f) = R(Z, \xi, f)$

"ξ_C" $= \inf f(C)$

Obersumme $O(Z,f) = R(Z, \xi, f)$

"ξ_C" $= \sup f(C)$

10

Satz 21.10 *Sei B eine messbare Menge in $\mathbb{R}^n$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ sind äquivalent*

(i) Es gibt Treppenfunktionen $\underline{f}_k, \overline{f}_k : B \to \mathbb{R}$ mit $\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} \int_B \underline{f}_k(x)\mathrm{d}x = c = \lim_{k\to\infty} \int_B \overline{f}_k(x)\mathrm{d}x$

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle Zerlegungen Z von B mit Weite $\leq \delta$ und alle Zwischenvektoren ξ gilt: $|c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Gitter-Zerlegung Z (alternativ: Zerlegung mit $Z = Z_B$) von B so, dass für alle Zwischenvektoren ξ gilt: $|c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$

(iv) $\sup_Z U(Z, f) = c = \inf_Z O(Z, f)$, wobei Z über alle Zerlegungen (mit $Z = Z_B$), alternativ alle Gitterzerlegungen läuft.

(v) Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $I \supseteq B$, so dass die Fortsetzung χ_B auf I Riemann integrierbar ist und $c = \int_I f\chi_B$. $\int_I f(\chi_B(x))\,dx$

Es gibt höchstens ein c, das (iii) erfüllt und es gilt $m(b-a) \leq c \leq M(b-a)$ falls $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in B$.

11

Definition 21.11 *Gilt eine (also alle) der Aussagen (i)-(iv) für ein $c \in \mathbb{R}$, so heißt f* Riemann-integrierbar *auf B, und der eindeutig bestimmte Wert c heißt* Riemann-Integral *von f auf B. Als Bezeichnung wählen wir*

$$c = \int_B f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$$

oder kurz

$$\int_B f(x) dx.$$

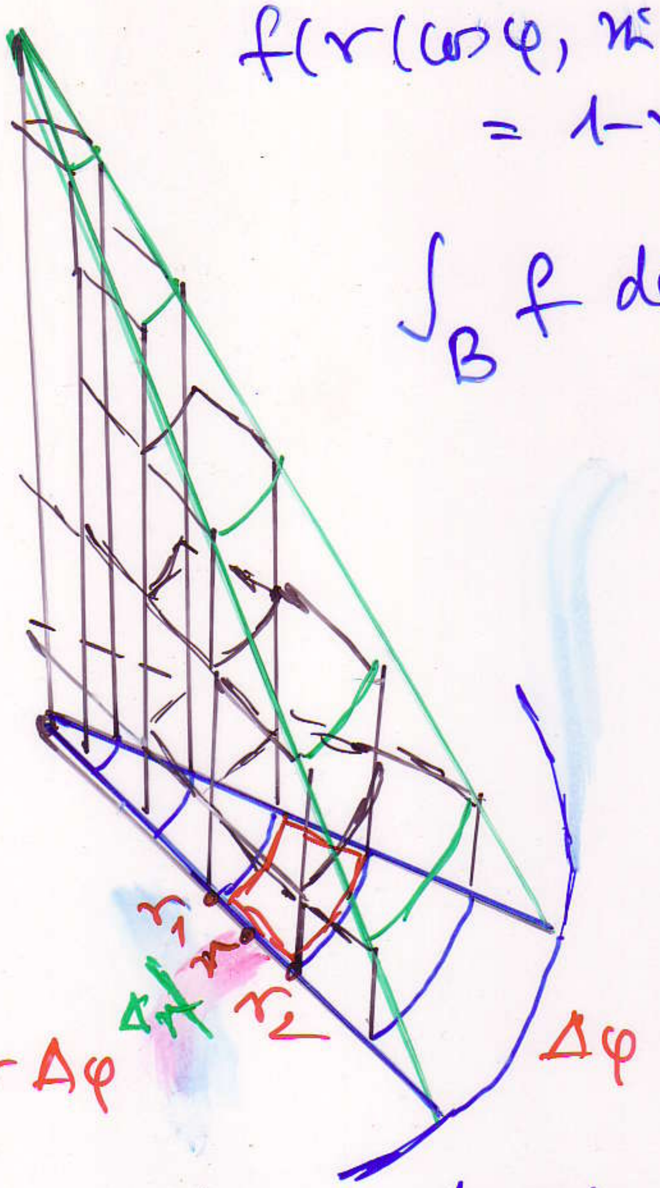
Korollar 21.12 *Beschränktes $f : B \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn es Treppenfunktionen $\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k$ gibt mit*

$$\int_I \overline{f}_k(x)\mathrm{d}x - \int_I \underline{f}_k(x)\mathrm{d}x \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

B = Einheitskreis

$$f(r(\cos\varphi, \sin\varphi)) = 1 - r$$

$$\int_B f \, d(x,y) = \, ?$$



$$\mu(F) = \underbrace{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)}_{r} \Delta r \, \Delta\varphi$$

Z_n $\quad \Delta r = \frac{1}{n}, \quad \Delta\varphi = \frac{1}{n} 2\pi \qquad r_1 = \frac{k}{n}, \quad r_2 = \frac{k+1}{n}$

$$U(Z_n, f) = \sum_{C \in Z_n} \min f(C) \, \mu(C)$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \underbrace{\frac{1}{2} \frac{2k+1}{n}}_{r} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{\pi}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(2k+1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\left(2\sum_{k=0}^{n-1} k + n - \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n-1} k + n\right)\right.$$

$$= \pi\left(\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2(n-1)n(2n-1)}{6n^3} - \frac{3n(n-1)}{2n^3} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rightarrow \pi\left(1 - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

(14)

21.4.3

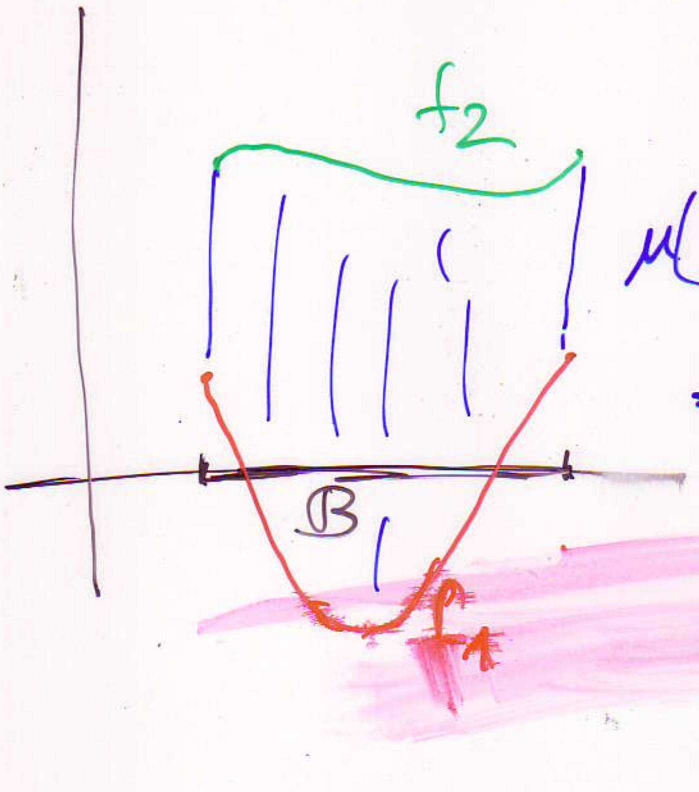
Ordinatenmenge

$$M(f) = \{(x,y) \mid x \in B,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

Kor: B messbar, $f \geq 0$ beschränkt

$\Rightarrow$ $M(f)$ messbar $\Leftrightarrow$ f integrierbar

$$\mu(M(f)) = \int_B f(x)\,dx$$



$$\mu(M(f_1,f_2)) = \int_B f_2(x) - f_1(x)\,dx$$

21.4.4 Rechenregeln

$$\int_B \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx$$
$$= \alpha \int_B f(x) + \beta \int_B g(x)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_B f(x) \leq \int_B g(x)$$

$$\left| \int_B f(x)\, dx \right| \leq \sup_{x \in B} |f(x)|\, \mu(B)$$

$$\int_{A \cup B} f(x)\, dx + \int_{A \cap B} f(x)\, dx$$
$$= \int_A f(x) dx + \int_B f(x)\, dx$$

Bew. oBdA $f \geq 0$,
$$\int f = \mu(M(f))$$

Ist $W(C)$ für alle kompakten messbaren Teilmengen von B definiert, so nennen wir W *additiv*, falls gilt

$$W(C_1 \cup C_2) = W(C_1) + W(C_2) \quad \text{falls } C_1 \cap C_2 \subseteq \partial C_1 \cap \partial C_2$$

Theorem 21.18 Summation. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-messbar und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

(i) $f : B \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle Intervalle $[c, d] \subseteq B$ von Weite $\leq \delta$ und alle messbaren $C \subseteq [c, d]$ und $\xi \in C$ gilt

$$\boxed{\left| \int_C f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)\mu(C) \right| \leq \varepsilon\mu(C)}$$

(ii) Mittelwertsatz: *Ist B wegzusammenhängend, so gibt $\xi \in B$ mit $\boxed{\int_B f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\mu(B)}$*

(iii) Sei $W(C)$ für alle kompakten messbaren $C \subseteq B$ definiert und additiv. Sei Z_n eine Folge von Zerlegungen von B mit Weite$(Z_n) \to 0$. Gelte weiterhin

($*$) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ und $C \in Z_n$ gilt

Es gibt $\xi \in C \cap B$ mit
$|W(C) - f(\xi)\mu(C)| \leq \varepsilon\mu(C)$

Dann gilt für alle kompakten messbaren $D \subseteq B$:
$\boxed{W(D) = \int_D f(x)\mathrm{d}x.}$

17

O.B.d.A. $C \subseteq B$ für alle $C \in Z_n$.
Wir setzen $W(\emptyset) = 0$.
Gegeben $\eta > 0$ wähle $\varepsilon < \frac{1}{27}\eta$ so, dass $\varepsilon M < \frac{\eta}{27}\mu(D)$
für $M = \max\{|f(x)| \mid x \in B\}$.
Wähle δ gemäss (i).
Wähle n_0 gemäß $(*)$ zu ε und so, dass $\mathrm{Weite}(Z_n) \leq \delta$
für alle $n \geq n_0$.
Wir betrachten $n \geq n_0$ schreiben $Z' = Z_n^\varepsilon$.
Dann mit der Additiviät und mit $\xi_C \in C$

$$W(D) = \sum_{C \in Z'} W(C \cap D)$$

$$= \sum_{C \in Z', C \subseteq D} f(\xi_C)\mu(C) \pm \varepsilon\mu(C) \pm \sum_{C \in Z', C \not\subseteq D} |W(C)|$$

$$= \sum_{C \in Z', C \subseteq D} [\int_C f \mathrm{d}x \pm 2\varepsilon\mu(C)] \pm \sum_{C \in Z', C \cap D \neq \emptyset, C \not\subseteq D} M \cdot \mu(C)$$

$$= \sum_{C \in Z', C \subseteq D} \int_C f \mathrm{d}x \quad \pm 2\varepsilon\mu(D) \pm \varepsilon M$$

$$= \int_D f(x)\mathrm{d}x \pm \sum_{C \in Z', C \cap D \neq \emptyset, C \not\subseteq D} \int_C f(x)\mathrm{d}x \quad \pm 2\varepsilon\mu(D) \pm \varepsilon M$$

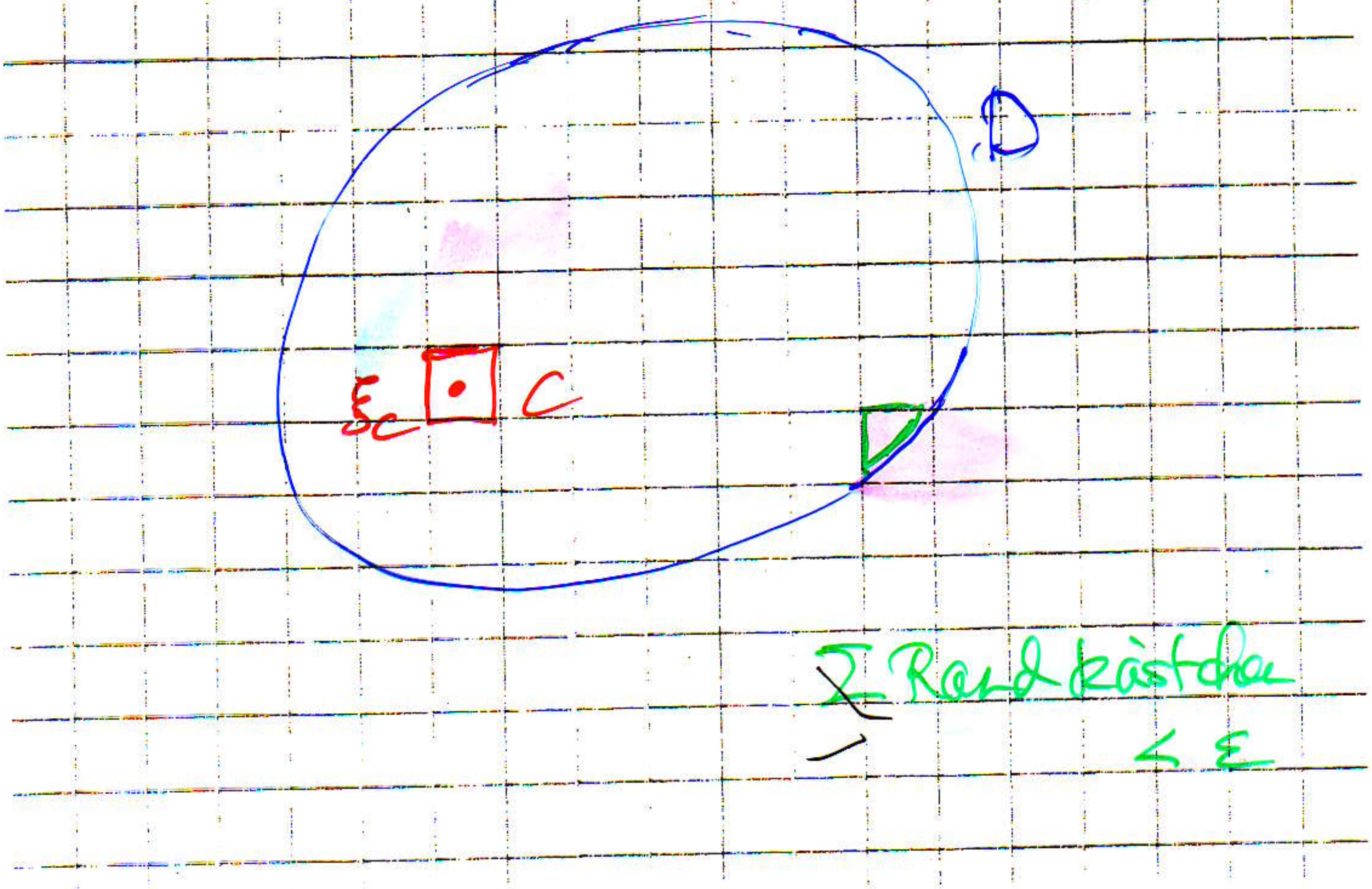
$$= \int_D f(x)\mathrm{d}x \pm \sum_{C \in Z', C \cap D \neq \emptyset, C \not\subseteq D} M \cdot \mu(C) \quad \pm 2\varepsilon\mu(D) \pm \varepsilon M$$

$$= \int_D f(x)\mathrm{d}x \pm \varepsilon M \pm 2\varepsilon\mu(D) \pm \varepsilon M = \int_D f(x)\mathrm{d}x \pm \eta \cdot \mu(D)$$

Das gilt für alle $\eta > 0$. Also $W(D) = \int_D f(x)\mathrm{d}x$. $\square$

$\eta > 0 \qquad M = \max |f(x)|$

$\varepsilon < \eta/27 \qquad \varepsilon M < \eta/27\, \mu(D)$



$f(\xi_c)\mu(C) \pm \varepsilon\mu(C) \qquad M \cdot \mu(C)$

$|$

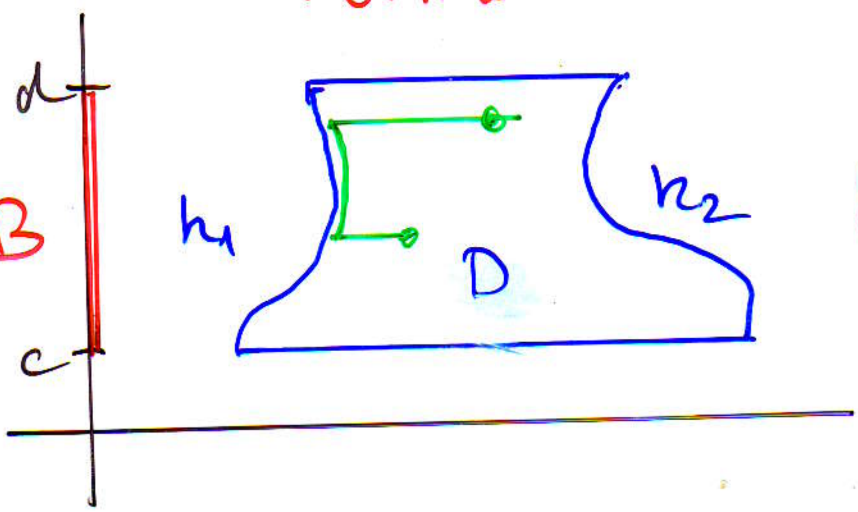
$\int_C f(x)\,dx \pm 2\varepsilon\mu(C)$

Σ

$$\int_D f(x)\,dx \underbrace{\pm \varepsilon M \pm 2\varepsilon\mu(C) \pm \varepsilon M}_{\pm \eta\, \mu(D)}$$

21.5.2

Normalbereich



$$D = \{(x,y) \mid y \in B,\ x \in \mathbb{R}\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

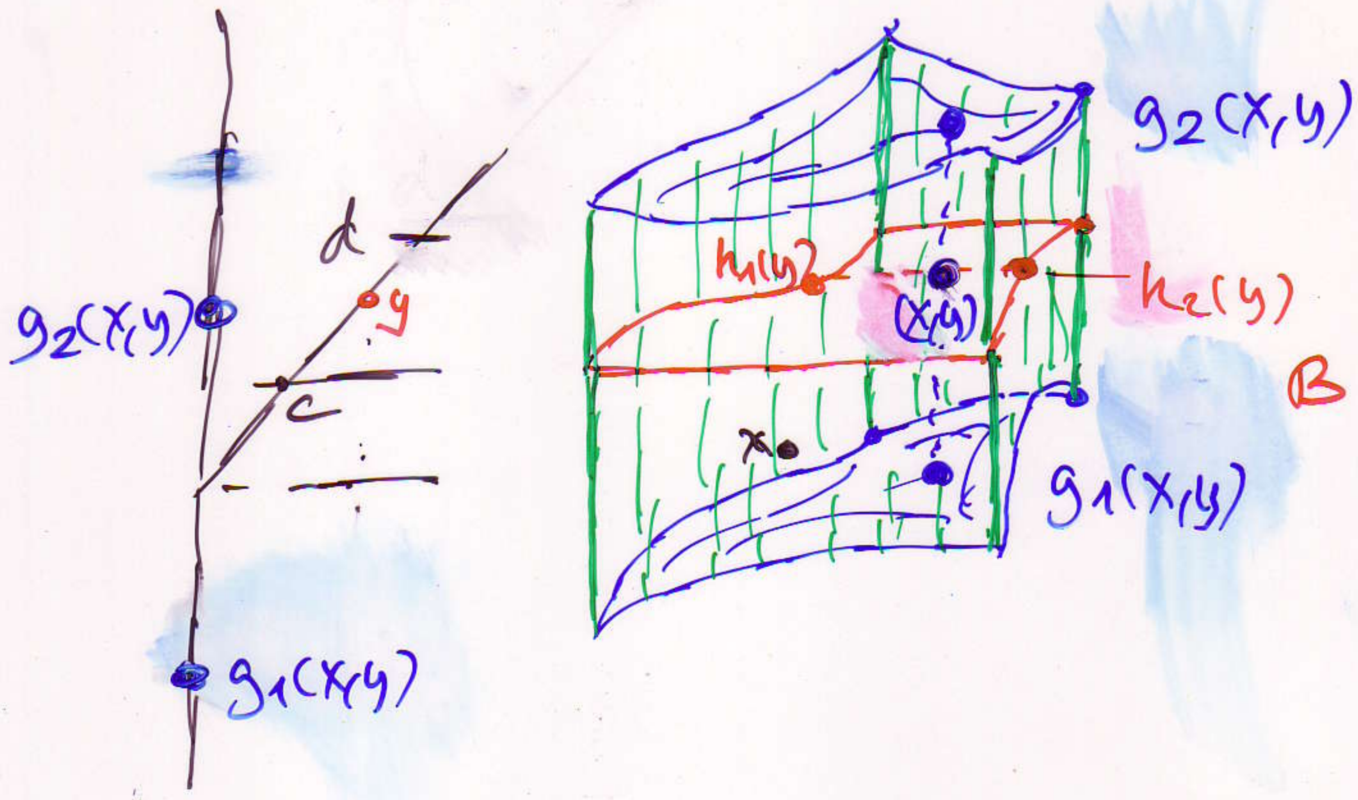
Def. $[c,d]$ Normalbereich
B Normalbereich, $h_1, h_2 : B \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ D Normalbereich

- D messbar (Ordinatenmenge)
- D wegzusammenhängend
- D beschränkt $B \subseteq I$, $D \subseteq I \times [\min h_1, \max h_2]$
- D abgeschlossen

$D \ni (x_n, y_n) \to (x,y)$

$$\underbrace{\lim h_1(y_n)}_{h_1(y) \in B} \le x \le \underbrace{\lim h_2(y_n)}_{h_2(y) \in B}$$



d
y
c
$g_2(x,y)$
$g_1(x,y)$
$g_2(x,y)$
$h_1(y)$
(x,y)
$h_2(y)$
B
x
$g_1(x,y)$

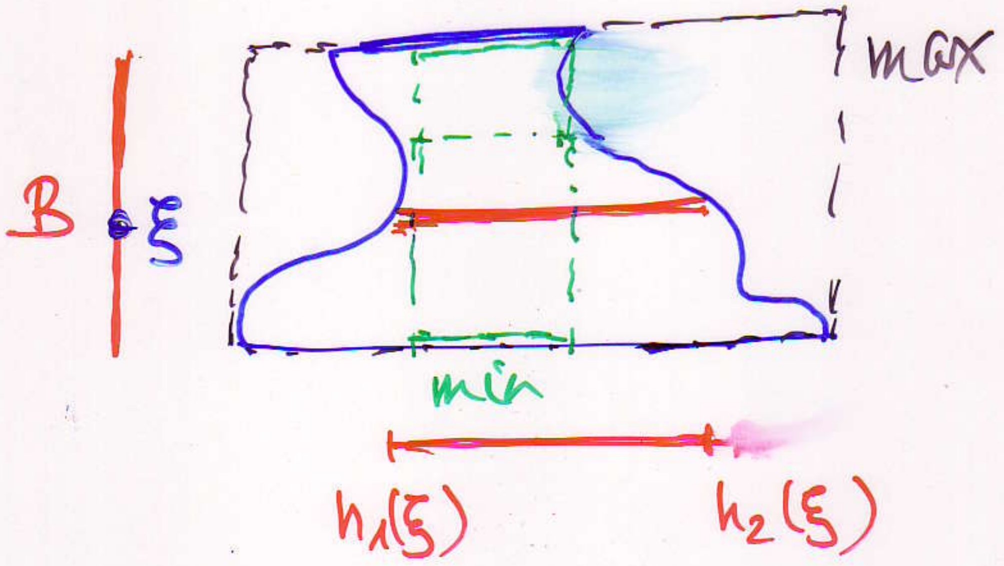
(21)

$$\mu(D) = \int_B h_2(x) - h_1(x)\, dx$$

$$= \left(h_2(\xi) - h_1(\xi)\right) \mu(B)$$

für ein $\xi \in B$

Mittelwertsatz, Zwischenwertsatz

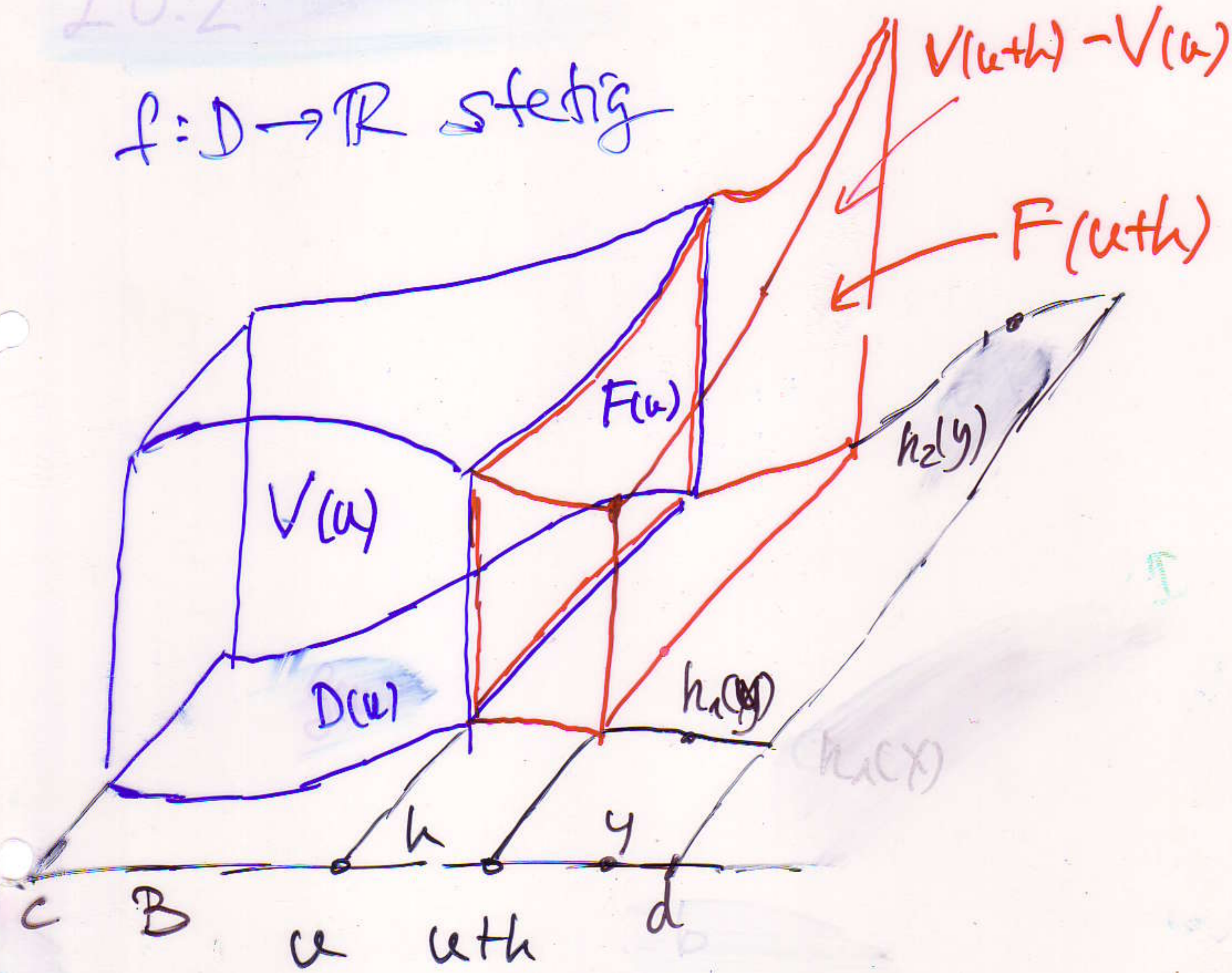


21.5.5

(22)

Satz 21.21

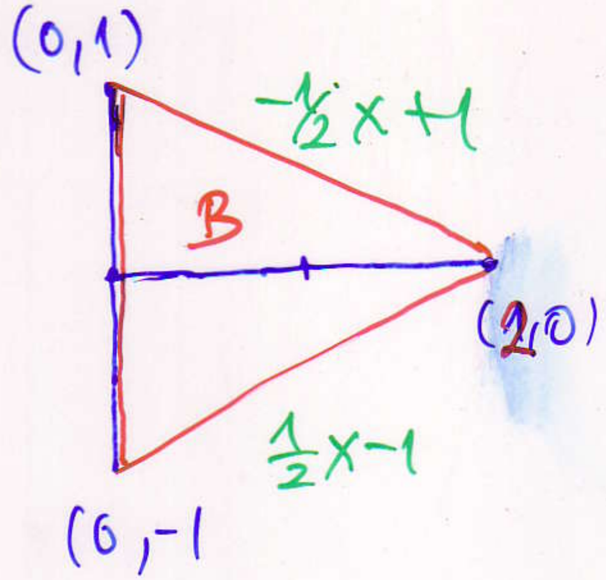
$f: D \to \mathbb{R}$ stetig



$$\frac{V(u+h) - V(u)}{h} \longrightarrow F(u) = \frac{dV}{du}$$

$$\boxed{\int_D f \, d(x,y) = \int_c^d \underbrace{\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f \, dx \right)}_{F(y)} dy}$$

23



$$f(x,y) = 3xy^2$$

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x-1}^{-\frac{1}{2}x+1} 3xy^2 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[xy^3 \right]_{\frac{1}{2}x-1}^{-\frac{1}{2}x+1} dx$$

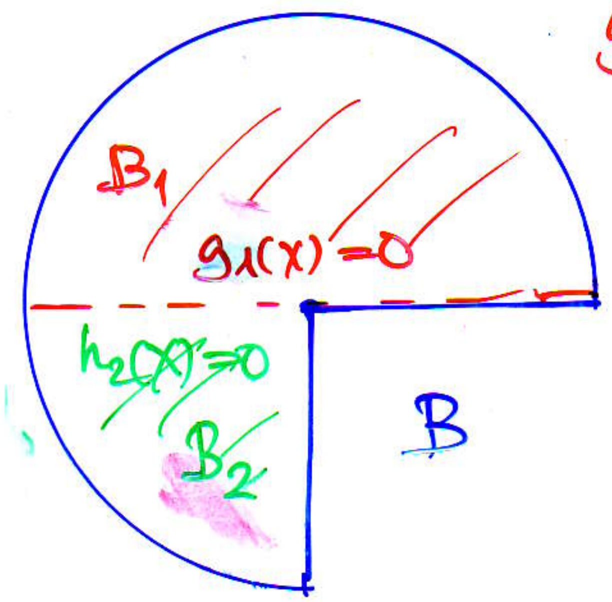
$$= \int_0^2 x\left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) - x\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$$

$$= \int_0^2 -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + 2x \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{8}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{8}{5} + 6 - 8 + 4 = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$$

$g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ 24



$f(x,y) = xy$

$h_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$

$$\int_{B_1} f = \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} x y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x (1-x^2) \, dx = \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_1^{-1} = 0$$

$$\int_{B_2} f = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{0} xy \, dy \, dx$$

$$= - \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{8}$$

$$\int_B f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f = \frac{1}{8}$$

$[c,d]$

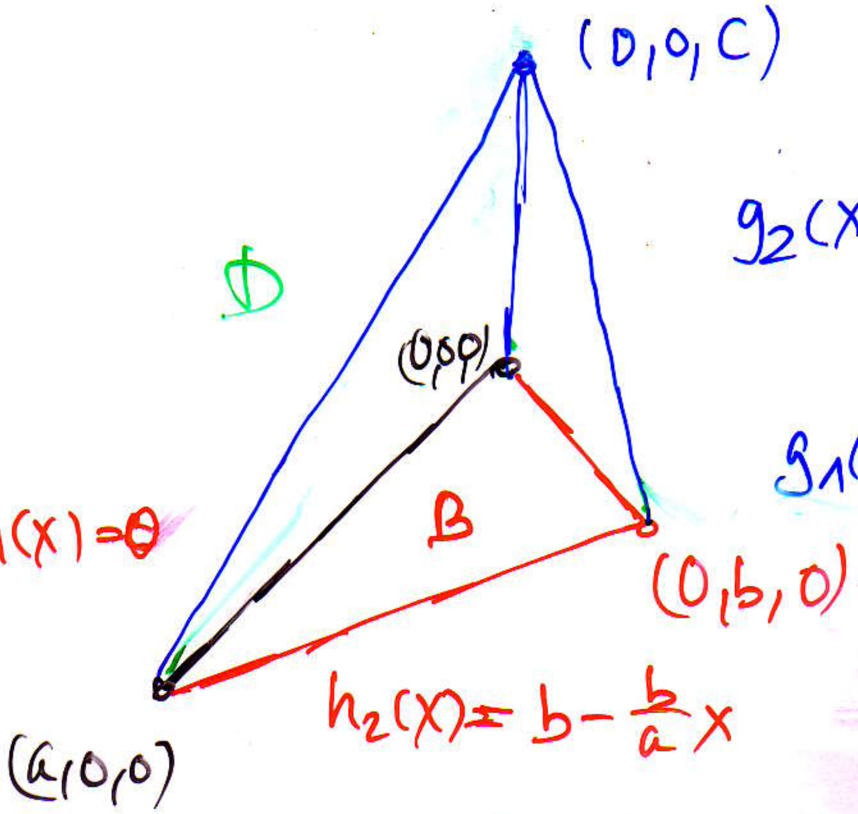
$$B = \{(x,y) \mid y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B\ \ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$$

$$\int_D f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_B \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)$$

$$= \int_c^d \underbrace{\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \underbrace{\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right)}_{G(x,y)} dx \right)}_{F(y)} dy$$



$g_2(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$

$g_1(x,y) = 0$

$h_1(x) = 0$

$h_2(x) = b - \frac{b}{a}x$

$\boxed{\text{y stehen lassen!}}$

$$\int_D f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

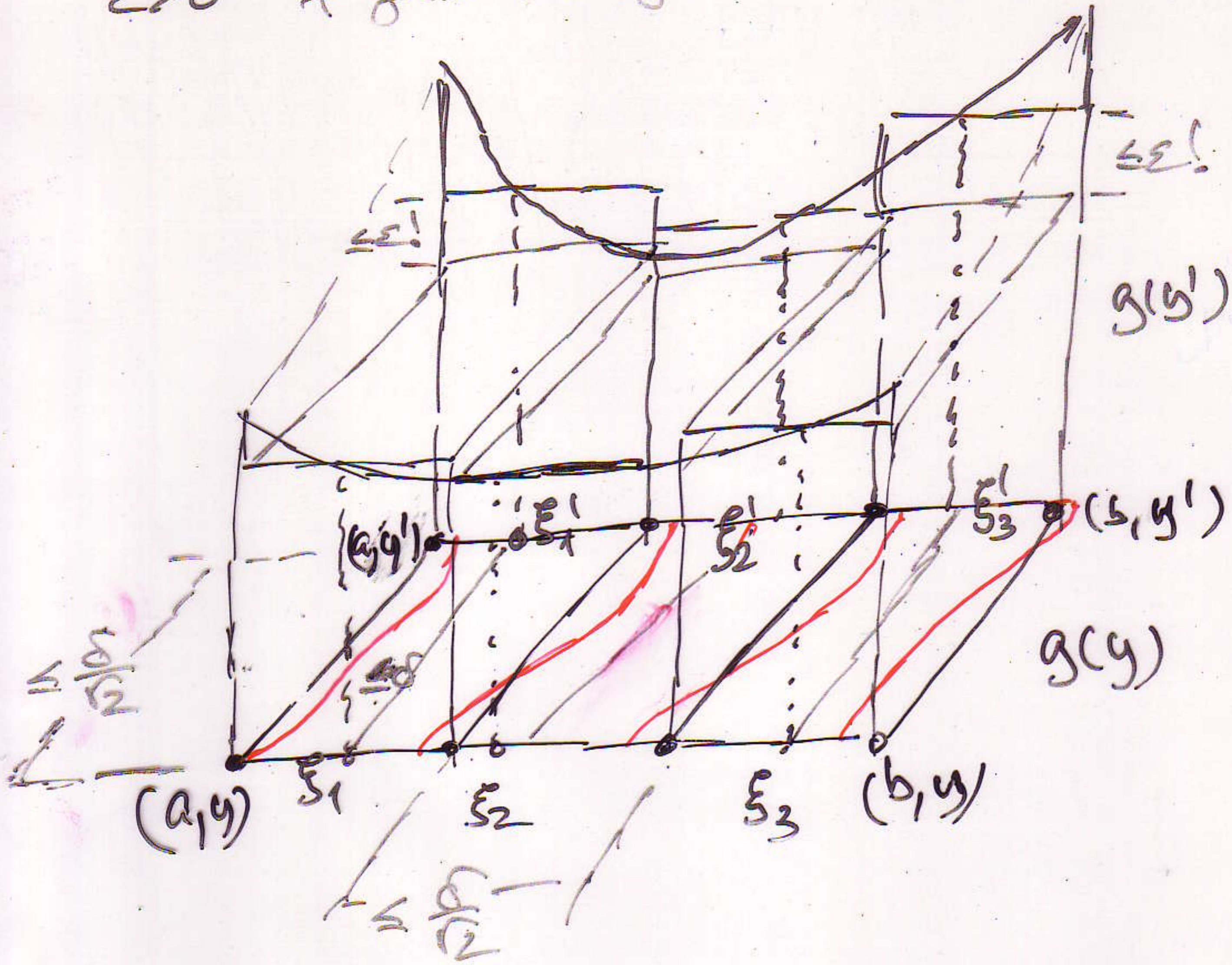
$f = 1$

$$= \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy\, dx$$

$$\int_0^a c\left[y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b}\right]_0^{b-\frac{b}{a}x} = \int_0^a \frac{bc}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{abc}{6}$$

$\varepsilon > 0$ f glm stetig $\leadsto \delta > 0$



$\Rightarrow |g(y') - g(y)| \leq \varepsilon(b-a)$

$\Rightarrow$ g(y) stetig