Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 10./11.2.2009

Analysis III – Funktionentheorie

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG: Zunächst beobachten wir, dass das Integral als uneigentliches Integral absolut konvergiert, denn es gilt

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

was eine konvergente Majorante ist.

Zweitens ist der Integrand gerade, d.h. es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich gilt, da der Kosinus eine gerade Funktion ist, $\cos(\omega x) = \cos(-\omega x) = \cos(|\omega| x)$, wir können uns also auf $\omega \ge 0$ beschränken.

Sei also von nun an $\omega \ge 0$. Wir betrachten

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{z^2+1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}.$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\Big) = \mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

Sei nun $r > 1$ und γ_r der Weg mit $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Dann liegt im Inneren des Weges $\gamma := \gamma_r + [-r, r]$ nur die Polstelle i von f, d.h. nach dem Residuensatz gilt für jedes $r > 1$

$$2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_f(\mathrm{i}) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^r f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wir berechnen dieses Residuum, da es sich um einen Pol erster Ordnung handelt, über

$$\mathrm{Res}_f(\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{z+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\omega}}{2\mathrm{i}}.$$

Weiter gilt $\mathrm{Im}(z) \ge 0$ für alle $z \in \mathrm{spur}(\gamma_r)$ und damit für all diese z auch

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}\omega z)} = \frac{1}{|z^2-(-1)|}\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{Im}(z)} \le \frac{1}{|z^2|-1} = \frac{1}{r^2-1}.$$

Das impliziert nun für das Integral über den Kreisbogen

$$\Big|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le \pi r\cdot\frac{1}{r^2-1} \longrightarrow 0 \quad (r\to\infty)$$

und wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_f(\mathrm{i}) = \pi\mathrm{e}^{-\omega}.$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{\pi\mathrm{e}^{-\omega}}{2}.$$

(G 2)

Bei Erkundungsflügen des Raumschiffs Enterprise im Rouché-Nebel ist nach durchfliegen mehrerer elektromagnetischer Disturberanzen ein Problem in der Beameinheit aufgetreten. Die Materialisierungskanone spielt verrückt und verteilt alles, was auf das Raumschiff gebeamt wird, ziemlich gleichmäßig auf der kreisrunden (und mit der komplexen Einheitskreisscheibe identifizierten) Plattform.

Scotty konnte die Störung schon so weit eindämmen, dass die Moleküle nicht mehr auf einer dichten Menge verteilt werden, sondern die Kanone schon auf einige Punkte fokussiert und die ankommenden Moleküle stochastisch auf diese verteilt. Leider ergeben sich diese Punkte durch eine recht komplizierte Rechnung als die Lösungen der Gleichung

$$\sin(z) = \frac{1}{2}z^7 - 3z.$$

Natürlich ist das Außenteam gerade unterwegs und müsste dringend hochgebeamt werden, wobei es zweckmäßigerweise in genau ein Einzelteil zerlegt werden sollte.

Kann Scotty das Außenteam gefahrlos hochbeamen?

LÖSUNG: Offensichtlich ist Null eine Lösung der Gleichung

$$\sin(z) = \frac{1}{2}z^7 - 3z.$$

Um Scotty zu beruhigen müssen wir also zeigen, dass diese im Einheitskreis $\mathbb{D}$ keine weitere Lösung besitzt. Wir schreiben dies als Nullstellensuche für die Funktion

$$f(z) := \sin(z) - \frac{1}{2}z^7 + 3z, \quad z\in\mathbb{C},$$

im Einheitskreis um und verwenden den Satz von Rouché.

Dazu betrachten wir die Funkion $g(z) := 3z - 1/2\cdot z^7$, $z\in\mathbb{C}$. Dann sind f und g holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ und der Weg, der den Rand des Einheitskreises beschreibt, ist nullhomolog in $\mathbb{C}$. Weiter gilt für alle z auf dem Rand des Einheitskreises, also alle mit $|z|=1$:

$$\begin{aligned}|f(z)-g(z)| &= |\sin(z)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} = \sinh(1)\\ &= \frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2} < \frac{\mathrm{e}}{2} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} = 3-\frac{1}{2} = 3|z| - \frac{1}{2}|z|^7 = |3z| - \Big|\frac{z^7}{2}\Big| \le \Big||3z| - \Big|\frac{z^7}{2}\Big|\Big|\\ &\le \Big|3z - \frac{1}{2}z^7\Big| = |g(z)|.\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché hat damit f im Einheitskreis genauso viele Nullstellen wie g.

Es bleibt also zu zeigen, dass g in $\mathbb{D}$ nur eine Nullstelle hat. Wieder ist mit $g(0) = 0$ eine Nullstelle offensichtlich, es bleibt also zu zeigen, dass

$$h(z) = \frac{g(z)}{z} = 3 - \frac{1}{2}z^6, \quad z \in \mathbb{C},$$

keine Nullstelle im Einheitskreis hat. Sei z_0 eine Nullstelle von h. Dann gilt $3 - z_0^6/2 = 0$, d.h. $z_0^6 = 6$. Also haben wir $|z_0|^6 = 6$ und damit $|z_0| = \sqrt[6]{6} > 1$.

Also hat h in $\mathbb{D}$ keine Nullstelle, d.h. g hat in $\mathbb{D}$ genau eine Nullstelle und f schließlich hat auch nur eine Nullstelle im Einheitskreis und Scotty kann die Maschine anwerfen.

(G 3)

(a) Es sei $a > 1$, $S := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq a\}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta \in (0,1)$ gibt, so dass für alle $\alpha, \beta \in (0, \delta)$ und alle $z \in S$ gilt

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}$, $\tilde{S} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq A\}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\kappa > 1$ gibt, so dass für alle $\alpha, \beta > \kappa$ und alle $z \in \tilde{S}$ gilt

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

LÖSUNG: (a) Für alle $t \geq 0$ gilt die Ungleichung $\mathrm{e}^t \geq 1 + t$. Um das einzusehen, kann man sich entweder an die Ana I erinnern oder schnell die Potenzreihe der Exponentialfunktion hinschreiben. Also ist $\mathrm{e}^t - 1 \geq t$ für alle $t \geq 0$. Damit gilt für alle $0 < t \leq 1$ und alle $z \in S$

$$\left| \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \right| = \frac{|t^{z-1}|}{|\mathrm{e}^t - 1|} \leq \frac{t^{\mathrm{Re}(z-1)}}{t} = \frac{t^{\mathrm{Re}(z)}}{t^2} \leq t^{a-2}.$$

Da $a > 1$ ist, ist das konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{a-2}\ \mathrm{d}t$. Also gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\int_0^\delta t^{a-2}\ \mathrm{d}t < \varepsilon$. Offensichtlich können wir dieses δ auch kleiner als eins wählen. Sind nun $\alpha, \beta \in (0, \delta)$, so gilt nach obigen Überlegungen

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_\alpha^\beta \left| \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \right| \mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta t^{a-2} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^\delta t^{a-2} \,\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

wie gewünscht.

(b) Die Funktion $t \mapsto t^{A-1}\mathrm{e}^{-t/2}$ ist auf dem Intervall $(1, \infty)$ beschränkt („Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom“), d.h. es gibt ein $C \geq 0$, so dass $t^{A-1} \leq C\mathrm{e}^{t/2}$ für alle $t > 1$ gilt. Damit haben wir für alle $z \in \tilde{S}$ und alle $t > 1$

$$\left| \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \right| = \frac{t^{\mathrm{Re}(z-1)}}{\mathrm{e}^t - 1} \leq \frac{t^{A-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \leq C \frac{\mathrm{e}^{t/2}}{\mathrm{e}^t - 1} = C \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$$

Nun gilt für die hier betrachteten t die Abschätzung $\mathrm{e}^{-t} \leq 1/\mathrm{e} < 1/2$. Also gilt $1 - \mathrm{e}^{-t} \geq 1/2$, wir erhalten also für alle $z \in \tilde{S}$ und alle $t > 1$

$$\left| \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \right| \leq 2C\mathrm{e}^{-t/2}.$$

Diese letzte Funktion ist auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar. Also gibt es wieder zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine groß genug gewählte Zahl $\kappa > 1$ mit $\int_\kappa^\infty \mathrm{e}^{-t/2}\ \mathrm{d}t < \varepsilon/(2C)$. Zusammengenommen haben wir damit für alle $\alpha, \beta > \kappa$

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_\alpha^\beta \left| \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \right| \mathrm{d}t \leq 2C \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t/2} \,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$