Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 27./28.1.2009

Analysis III – Funktionentheorie

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f im Kreisring $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ und im Kreisring $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(b) Bestimmen Sie weiter $\omega_f(0)$, $\omega_f(1)$ und $\omega_f(2)$, sowie jeweils die Residuen in diesen Punkten.

LÖSUNG: (a) Im Kreisring R_1 ist eine Laurententwicklung um die Stelle $z_0 = 1$ gesucht, damit ist die Laurentreihe einfach $\frac{1}{z-1}$, d.h. nur $a_{-1} = 1$ und alle anderen a_n sind Null.

Der Kreisring R_2 ist um $z_0 = 0$ zentriert, wir müssen also f in Potenzen von z^n, $n \in \mathbb{Z}$, entwickeln. Dazu schreiben wir mit der geometrischen Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n.$$

In diesem Fall besteht die Laurentreihe also nur aus einem Hauptteil.

(b) Die Funktion f ist in 0 holomorph, also kann sie in einer Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren Term nullter Ordnung wegen $f(0) = -1 \neq 0$ nicht Null ist. Also ist $\omega_f(0) = 0$.

Genauso ist $\omega_f(2) = 0$.

Wir wenden uns also $\omega_f(1)$ zu. Zur Bestimmung dieser Nullstellenordnung benötigen wir eine Laurententwicklung von f um den Punkt $z_0 = 1$. Diese haben wir im Teil (a) zu

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

bestimmt, was $\omega_f(1) = -1$ bedeutet. Wir haben es also mit einem Pol erster Ordnung zu tun (was ja auch bei einem Blick auf die Funktion nicht wirklich überrascht).

Da f in 0 und 2 holomorph ist, haben wir dort natürlich

$$\mathrm{Res}_f(0) = \mathrm{Res}_f(2) = 0.$$

Weiter ist das Residuum der Koeffizient a_{-1} aus der Laurententwicklung um den betrachteten Punkt, also haben wir wieder mit der in (a) bestimmten Laurententwicklung um 1

$$\mathrm{Res}_f(1) = 1.$$

(G 2)

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $\omega_f(z_0) > -\infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt genau dann $\omega_f(z_0) = n$, wenn es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ gibt, für die $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt.

(b) $\omega_f(z_0) = -\omega_{1/f}(z_0)$ (vgl. den Beweis zu Satz IV.2.4).

(c) $\omega_{f\cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)$.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $\omega_f(z_0) = n \iff$ es gibt $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Da $\omega_f(z_0) = n$ gilt, gibt es einen Radius $r > 0$, so dass wir f auf dem Kreisring $R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ durch eine Laurentreihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$$

mit $a_n \neq 0$ darstellen können. Setzen wir nun $h(z) := (z - z_0)^{-n} f(z)$, $z \in U \setminus \{z_0\}$, so ist $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^k$ für $z \in R$. Damit ist dieses eine in $B_r(z_0)$ konvergente Potenzreihe, also ist h auf dieser Menge holomorph. Weiter ist h als Produkt zweier holomorpher Funktionen auch auf $U \setminus B_r(z_0)$ holomorph, d.h. h ist auf ganz U holomorph. Weiter folgt aus der Potzenreihendarstellung $h(z_0) = a_{0+n} = a_n \neq 0$ und wir haben

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

„$\Leftarrow$" Da h in U holomorph ist, gibt es ein $r > 0$, so dass h in der Kugel $B_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ dargestellt wird und dank $h(z_0) \neq 0$ wissen wir, dass $a_0 \neq 0$ ist. Damit gilt für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k,$$

wobei der Summand für $k = n$ nicht verschwindet. Damit gilt $\omega_f(z_0) = n$.

(b) Es sei $n := \omega_f(z_0)$. Dann gibt es nach dem (a)-Teil eine auf U holomorphe Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Dank $h(z_0) \neq 0$ ist auch $1/h$ in einer Umgebung von z_0 holomorph mit $1/h(z_0) \neq 0$ und wir bekommen für alle z in dieser Umgebung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n h(z)} = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{h(z)}.$$

Also ist wieder durch Anwendung von (a) $\omega_{1/f}(z_0) = -n = -\omega_f(z_0)$, wie gewünscht.

(c) Wir betrachten zunächst den Fall $\omega_g(z_0) > -\infty$. Dann gibt es nach (a) auf U holomorphe Funktionen h_f und h_g mit $h_f(z_0) \neq 0$ und $h_g(z_0) \neq 0$, sowie

$$f(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0)} h_f(z) \quad \text{und} \quad g(z) = (z - z_0)^{\omega_g(z_0)} h_g(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Damit gilt für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ weiter

$$(f \cdot g)(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0)} h_f(z)(z - z_0)^{\omega_g(z_0)} h_g(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)} h_f(z) h_g(z).$$

Nun ist auch die Funktion $h := h_f \cdot h_g$ in U holomorph und es gilt $h(z_0) = h_f(z_0) \cdot h_g(z_0) \neq 0$. Also gilt nach dem (a)-Teil

$$\omega_{f\cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0).$$

Wir wenden uns also dem Fall $\omega_g(z_0) = -\infty$ zu und nehmen an, es wäre $\omega_{f\cdot g}(z_0) =: n > -\infty$. Da $g = (f\cdot g)\cdot 1/f$ ist, bekommen wir dann mit der Argumentation von oben und (b) sofort

$$\omega_g(z_0) = \omega_{(f\cdot g)\cdot 1/f}(z_0) = \omega_{f\cdot g}(z_0) + \omega_{1/f}(z_0) = \omega_{f\cdot g}(z_0) - \omega_f(z_0) > -\infty,$$

also einen Widerspruch.

(G 3)

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$. Weiter Sei W eine Umgebung von $w_0 := f(z_0)$ und die holomorphe Funktion $g : W \setminus \{w_0\} \to \mathbb{C}$ besitze in w_0 einen einfachen Pol. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $g \circ f$ in z_0 ebenfalls einen einfachen Pol besitzt und bestimmen Sie $\mathrm{Res}_{g\circ f}(z_0)$.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass $g\circ f$ in z_0 einen einfachen Pol besitzt, d.h. dass $\omega_{g\circ f}(z_0) = -1$ ist und verwenden dazu (G2) (a). Da die Funktion g in w_0 einen einfachen Pol hat, d.h. $\omega_g(w_0) = -1$, bekommen wir mit dieser Aufgabe die Existenz einer auf W holomorphen Funktion h mit $h(w_0) \neq 0$ und $g(w) = (w - w_0)^{-1}h(w)$ für alle $w \in W \setminus \{w_0\}$.

Sei nun $V \subseteq U$ eine Umgebung von z_0 mit $f(V) \subseteq W$. Dann gilt für alle $z \in V$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = (f(z) - w_0)^{-1}h(f(z)) = \frac{1}{z - z_0}\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}h(f(z))$$

Setzen wir nun für $z \in V$

$$u(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{falls } z \neq z_0,\\ f'(z_0), & \text{falls } z = z_0,\end{cases}$$

so ist u in V holomorph und wegen $u(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, gibt es eine weitere Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von z_0, auf der auch die Funktion u^{-1} holomorph ist. Damit gilt

$$(g \circ f)(z) = (z - z_0)^{-1}u(z)^{-1}h(f(z)) \quad \text{für alle } z \in \tilde{V}.$$

Weiter ist $u^{-1} \cdot (h \circ f)$ auf $\tilde{V}$ holomorph, denn u^{-1} und f sind dort holomorph und h ist auf $f(\tilde{V})$ holomorph und schließlich gilt auch $u(z_0)^{-1} \cdot h(f(z_0)) = h(w_0)/f'(z_0) \neq 0$. Aufgabe (G2) (a) impliziert nun, dass $g \circ f$ einen einfachen Pol in z_0 hat.

Mit Beispiel IV.3.3 a) der Vorlesung bekommen wir nun das Residuum von $g \circ f$ in z_0 als

$$\mathrm{Res}_{g\circ f}(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)g(f(z)) = \lim_{z\to z_0}\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}(f(z) - f(z_0))g(f(z)).$$

Da f stetig in z_0 ist, gilt $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = w_0$. Also haben wir

$$\mathrm{Res}_{g\circ f}(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \cdot \lim_{w\to w_0}(w - w_0)g(w) = \frac{1}{f'(z_0)}\mathrm{Res}_g(w_0) = \frac{\mathrm{Res}_g(f(z_0))}{f'(z_0)}.$$

Hausübungen

(H 1)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S \subseteq M$ diskret und $f : M \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $r_1, r_2 > 0$ so, dass f im Kreisring $R := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ holomorph ist und für die zugehörige Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $z \in R$, gilt, dass $a_n \neq 0$ für alle $n < 0$ ist. Dann besitzt f eine wesentliche Singularität.

Hinweis: Aufgabe (G1).

LÖSUNG: Die Aussage ist falsch. Das Gegenbeispiel liefert die Aufgabe (G1). Dort haben wir gesehen, dass für $f(z) = 1/(z-1)$, $S = \{1\}$, $r_1 = 1$ und $r_2 = 2$ sich die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n$$

ergibt. Hier gilt $a_n = 1$ für alle $n < 0$. Trotzdem hat f keine wesentliche Singularität sondern nur einen Pol erster Ordnung.

Kommentar: Zur Bestimmung der Nullstellenordnung kommt es sehr darauf an, dass man die „richtige" Laurententwicklung nimmt, nämlich die um die isolierte Singularität z_0 in einem punktierten Kreis $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ entwickelte. Im obigen Beispiel wäre das die andere Laurententwicklung aus (G1) (a).

(H 2)

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen

$$\text{(a)} \quad z \mapsto \frac{e^{1/(z-1)}}{e^z - 1} \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad z \mapsto (z+1)\sin(1/(z-1)),$$

ermitteln Sie, ob es sich jeweils um hebbare Singularitäten, Pole oder wesentliche Singularitäten handelt und bestimmen Sie in allen Polstellen jeweils das Residuum.

LÖSUNG: (a) Problemstellen sind offensichtlich $z = 1$ im Exponenten des Zählers und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$, d.h. alle Zahlen $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Überall sonst ist die Funktion holomorph. Mit den Bezeichnungen

$$f(z) := \frac{e^{1/(z-1)}}{e^z - 1}, \qquad g(z) := e^{1/(z-1)} \quad \text{und} \quad u(z) := e^z - 1$$

erhalten wir mit freundlicher Mithilfe von Aufgabe (G2) (c)

$$\omega_f(1) = \omega_g(1) + \omega_{1/u}(1).$$

Da u in 1 holomorph und $u(1) = e - 1 \neq 0$ ist, wissen wir, dass auch $1/u$ in 1 holomorph ist mit $1/u(1) \neq 0$. Also ist $\omega_{1/u}(1) = 0$. Außerdem gilt für alle $z \in \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w-1| < 1/2\}$ (Man beachte, dass dieser Kreisring keine Zahl der Form $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ enthält)

$$g(z) = e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} (z-1)^n.$$

Also ist $\omega_g(1) = -\infty$ und damit auch $\omega_f(1) = -\infty$, d.h. in 1 liegt eine wesentliche Singularität vor.

Wir betrachten also noch die Stellen $z_k := 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to z_k} e^{1/(z-1)} \frac{z - 2k\pi i}{e^z - 1} = e^{1/(z_k - 1)} \lim_{z \to z_k} \frac{z - 2k\pi i}{e^{z - 2k\pi i} - 1} = e^{1/(z_k - 1)} \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1}.$$

Wir erinnern uns schnell an die Analysis I:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = 1.$$

Also ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = e^{1/(z_k - 1)} \neq 0.$$

Aus der Existenz obigen Grenzwertes folgt nun zunächst, dass $z \mapsto h(z) := (z - z_k)f(z)$ in einer Umgebung von z_k beschränkt ist, also ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz diese Funktion nach z_k holomorph fortsetzbar. Außerdem ist $h(z_k)$ durch obigen Grenzwert gegeben und damit nicht Null. Nach dem Kriterium in (G2) (a) liegt somit in z_k ein einfacher Pol vor.

Das Residuum bestimmt sich nun nach Beispiel 3.3 (a) wieder durch den obigen Grenzwert. Es gilt also

$$\mathrm{Res}_f(2k\pi\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{1/(2k\pi\mathrm{i}-1)}.$$

(b) Problemstelle ist hier nur $z = 1$. Überall sonst ist die Funktion holomorph. Wir zerlegen dieses Mal in

$$f(z) := (z+1)\sin(1/(z-1)), \qquad g(z) := (z+1), \quad \text{und} \quad u(z) = \sin(1/(z-1)), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

Dann ist analog zu (a) $\omega_f(1) = \omega_u(1)$, da g in 1 holomorph mit $g(1) = 2 \neq 0$ ist.

Für die Nullstellenordnung von u in 1 beobachten wir, dass für alle $z \neq 1$ gilt

$$u(z) = \sin(1/(z-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2n)!}(z-1)^{2n-1}.$$

Also sind alle Koeffizienten der Laurentreihe mit negativem, ungeradem Index nicht Null, woraus $\omega_f(1) = \omega_u(1) = -\infty$ folgt. Auch hier liegt also eine wesentliche Singularität vor.

(H 3)

Es sei $S \subseteq \mathbb{C}$ endlich mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} z \cdot f(z) = 0$.

(a) Zeigen Sie: Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S, \mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_f(a).$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Ist der Wert des Integrals reell?

Lösung: (a) Da das untersuchte Integral nach Voraussetzung existiert, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir wählen nun $r > 0$ so groß, dass $S \subseteq B_r(0)$ gilt. Das geht, da S endlich vorausgesetzt ist. Damit betrachten wir den Weg $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, der einen Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius r beschreibt. Dann ist $\gamma := [-r, r] + \gamma_r$ ein nullhomologer Zyklus in $\mathbb{C}$ und es gilt nach Voraussetzung $\mathrm{Spur}(\gamma) \cap S = \emptyset$. Mit dem Residuensatz gilt also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S} I(\gamma, a)\mathrm{Res}_f(a) = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S, \mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_f(a),$$

da $I(\gamma, a)$ für alle a aus der oberen Halbebene Eins und für alle aus der unteren Halbebene Null ist.

Weiter ist

$$\int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[-r,r]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

und wir können das letzte Integral folgendermaßen abschätzen

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t$$

Nun impliziert die Voraussetzung $\lim_{|z|\to\infty,\mathrm{Im}(z)\geq 0} zf(z) = 0$, dass $\lim_{r\to\infty} r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})| = 0$ ist und zwar gleichmäßig in $\phi \in [0,\pi]$, womit

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z \leq \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t = 0$$

gilt.

Das führt schließlich auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{a\in S,\mathrm{Im}(a)>0}\mathrm{Res}_f(a).$$

(b) Wir wenden natürlich (a) mit $f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^4}$ an. Dann ist f nur an höchstens vier Stellen nicht holomorph und keine der Singularitäten ist auf der reellen Achse.

Weiter gilt für große $|z|$ eine Abschätzung $|1+z^4| \geq C|z|^4$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}}|zf(z)| &= \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}}\frac{|z|}{|1+z^4|}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \leq \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}}\frac{|z|}{C|z|^4}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = \frac{1}{C}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}}\frac{1}{|z|^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)}\\ &\leq \frac{1}{C}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}}\frac{1}{|z|^3}\cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

also gilt $\lim_{|z|\to\infty,\mathrm{Im}(z)\geq 0} zf(z) = 0$ und wir können (a) anwenden. Die Singularitäten von f liegen in $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$ und $z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$. Davon liegen nur z_1 und z_2 in der oberen Halbebene. Also gilt mit (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}_f(z_1) + \mathrm{Res}_f(z_2)\big).$$

Da in z_1 und z_2 Pole erster Ordnung vorliegen, gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_f(z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(1-\mathrm{i})\big)}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})/\sqrt{2}}\end{aligned}$$

und genauso

$$\mathrm{Res}_f(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})/\sqrt{2}}.$$

Zusammen ist dann

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\Big[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})/\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})/\sqrt{2}}\Big]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\Big[(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\sqrt{2}} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}/\sqrt{2}}\Big]\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\mathrm{Im}\Big[(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\sqrt{2}}\Big]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\big(\cos(1/\sqrt{2}) + \sin(1/\sqrt{2})\big).\end{aligned}$$

Das Integral hat also einen reellen Wert.