Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 13./14.1.2009

Analysis III – Funktionentheorie

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ beschränkt. Wir betrachten das reelle uneigentliche Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und $I = \lim\limits_{r\to\infty} \displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t$ gilt.

(b) Sei für $r > 0$

$$\gamma_{r,1}(t) = t, \quad t \in [-r, r] \qquad \text{und} \qquad \gamma_{r,2}(t) = re^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi],$$

sowie $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z.$$

(c) Folgern Sie nun $I = \pi \cdot h(\mathrm{i})$.

(d) Bestimmen Sie damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG: (a) Wir beobachten zunächst, dass das Integral wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{h(t)}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

absolut konvergent ist. Deshalb gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Sei $r > 0$. Der Weg γ_r beschreibt den einmal positiv durchlaufenen Rand des Halbkreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$, insbesondere ist γ_r ein geschlossener Weg in $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > -1/2\}$. Weiter ist dieser offensichtlich nullhomolog in G und die Funktion $f(z) := h(z)/(z+\mathrm{i})$ ist holomorph in G. Mit der Cauchy-Integralformel aus Satz III.2.4 b), angewandt auf f und mit $n = 0$, gilt dann

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{0!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} I(\gamma_r, \mathrm{i}) f(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot 1 \cdot \frac{h(\mathrm{i})}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \pi h(\mathrm{i}).$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert beobachten wir zunächst

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \right| \leq L(\gamma_{r,2}) \max_{z \in \mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})} \frac{|h(z)|}{|1+z^2|} \leq \pi r C \max_{z \in \mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})} \frac{1}{|1+z^2|},$$

wobei $C := \sup\{|h(z)| : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ ist.

Betrachten wir nur den Fall $r > 1$ (andere interessieren hier nicht, da wir ja den Grenzwert $r \to \infty$ untersuchen), so gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})$

$$|1+z^2| = |z^2 - (-1)| \geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1 = r^2 - 1, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{r^2-1}.$$

Zusammen mit obiger Abschätzung liefert das

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \right| \leq C\pi r \frac{1}{r^2-1} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty).$$

Also gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} = 0.$$

(c) Mit den Ergebnissen aus (a) und (b) erhalten wir

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2} \,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \,\mathrm{d}z \right] \\ &= \lim_{r\to\infty} \pi \cdot h(\mathrm{i}) - \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \,\mathrm{d}z = \pi \cdot h(\mathrm{i}) - 0 = \pi \cdot h(\mathrm{i}). \end{aligned}$$

(d) Der Kosinus ist bekanntermaßen auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph aber leider nicht auf der oberen Halbebene beschränkt. Daher schreiben wir das Integral noch ein bisschen um:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \right),$$

wobei wir im zweiten Schritt die Stetigkeit der Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ genutzt haben.

Nun ist auch die Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und da aus $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)} \leq 1$$

folgt, ist sie auch auf der oberen Halbebene beschränkt. Wir können also im obigen Teil der Aufgabe $h(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ setzen und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \right) = \mathrm{Re}(\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}) = \mathrm{Re}(\pi \mathrm{e}^{-1}) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

(G 2)

(a) Bestimmen Sie für die folgende Laurentreihe den Haupt- und den Nebenteil, sowie ihr Konvergenzgebiet (ohne Betrachtung des Konvergenzverhaltens auf dem Rand):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n.$$

(b) Bestimmen Sie weiter einen geschlossenen Ausdruck für die durch die Laurentreihe in (a) gegebene Funktion. Sieht man diesem Ausdruck an, warum der Konvergenzbereich in (a) nicht größer sein kann?

(c) Geben Sie eine Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ für $1 < |z| < 2$ an.

Hinweis: Man kann $f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}$ für geeignete A und B schreiben.

LÖSUNG: (a) Es ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-|n|} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|n|} z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n}_{\text{Nebenteil}}.$$

Die Konvergenz müssen wir in Haupt- und Nebenteil getrennt untersuchen. Für den Nebenteil erhalten wir wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

eine geometrische Reihe, die für $|z| < 2$ konvergiert und für $|z| > 2$ divergiert. Den Hauptteil schreiben wir uns durch

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

ebenfalls in eine geometrische Reihe um. Diese konvergiert für $|z| > 1/2$ und divergiert für $|z| < 1/2$.

Für die gesamte Laurentreihe haben wir also Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $1/2 < |z| < 2$ und Divergenz falls $|z| < 1/2$ oder $|z| > 2$ ist. Das offene Konvergenzgebiet ist also der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$.

(b) Wir haben mit den geometrischen Reihen aus (a) und der Formel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} - 1 \\ &= \frac{2}{2-z} + \frac{2z}{2z-1} - 1 = \frac{z}{(2-z)(2z-1)}.\end{aligned}$$

Diese Funktion ist offensichtlich holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{1/2, 2\}$, hat aber Singularitäten in $1/2$ und 2. Das erklärt warum der Konvergenzbereich in (a) nicht größer sein kann.

(c) Der Ansatz aus dem Hinweis führt auf

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}.$$

Multiplizieren wir mit $(z+1)(z-2)$ durch, erhalten wir $3 = A(z-2) + B(z+1)$, was uns durch Einsetzen von $z = 2$ bzw. $z = -1$ die Lösung $A = -1$ und $B = 1$ liefert.

Es gilt also

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}.$$

Nun soll uns mit Hilfe der geometrischen Reihe der erste Summand den Hauptteil und der zweite den Nebenteil liefern. Dazu müssen wir diese so umschreiben, dass wir die Summenformel der geometrischen Reihe erkennen. Wir formen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $1 < |z| < 2$ um:

$$\begin{aligned}\frac{3}{(z+1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2}-1} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-n} z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^n.$$

(G 3)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass für jeden Punkt $z \in G$ die gesamte Verbindungsstrecke von z und z_0 ganz in G liegt, d.h. für jedes $z \in G$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda z_0 + (1-\lambda)z \in G$. Man sagt dann „$G$ ist bezüglich z_0 sternförmig".

(a) Zeigen Sie, dass jedes konvexe Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig ist.

(b) Es sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $z_0 \in G$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : [a,b] \to G$ ein Zyklus mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$. Beweisen Sie, dass γ nullhomotop und damit nullhomolog in G ist.

Bemerkung: Tatsächlich gilt das für jeden Zyklus in einem sternförmigen Gebiet, d.h. jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend. Die Voraussetzung $\gamma(a) = z_0$ macht den Beweis jedoch deutlich übersichtlicher.

LÖSUNG: *Behauptung:* Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig.

Beweis: Sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in G$ beliebig gewählt. Für jedes $z \in G$ ist dann die Verbindungsstrecke $z_0 + \lambda(z - z_0)$, $\lambda \in [0,1]$, in G enthalten, da G konvex ist. Also ist G sternförmig bezüglich z_0. □

Behauptung: Jeder Zyklus γ in G mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$ ist nullhomolog.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $\psi : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi(t,s) = (1-s)\gamma(t) + sz_0, \quad t \in [a,b],\ s \in [0,1].$$

Dann ist ψ offensichtlich stetig. Weiter ist für jedes festgehaltene $t \in [a,b]$ der Punkt $\gamma(t)$ nach Voraussetzung in G. Betrachtet man nun die Abbildung $s \mapsto \psi(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$, so ist deren Bild für $s \in [0,1]$ genau die Verbindungslinie von z_0 und $\gamma(t)$. Nun ist G sternförmig bezüglich z_0, d.h. diese Verbindungslinie gehört vollständig zu G. Das bedeutet, dass $\psi(t,s) \in G$ für alle $t \in [a,b]$ und alle $s \in [0,1]$ gilt.

Damit ist ψ eine stetige Abbildung von $[a,b] \times [0,1]$ nach G und es gilt

$$\begin{aligned}
&\psi(t,0) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in [a,b],\\
&\psi(t,1) = z_0 \quad \text{für alle } t \in [a,b],\\
&\psi(a,s) = (1-s)\gamma(a) + sz_0 = (1-s)z_0 + sz_0 = z_0 \quad \text{für alle } s \in [0,1],\\
&\psi(b,s) = (1-s)\gamma(b) + sz_0 = (1-s)z_0 + sz_0 = z_0 \quad \text{für alle } s \in [0,1].
\end{aligned}$$

Nach Definition III.2.6 b) ist damit γ nullhomotop und damit auch nullhomolog. □

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten für $b > 0$ das Integral

$$\mathrm{e}^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x.$$

(b) Integrieren Sie für $a > 0$ die Funktion e^{-z^2} über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $\pm a$ und $\pm a + b\mathrm{i}$ und zeigen Sie

$$\mathrm{e}^{b^2} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2tb)\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2} + \int_{0}^{b} \mathrm{e}^{-a^2} \left[\mathrm{e}^{t^2} \sin(2at) + \mathrm{e}^{(b-t)^2} \sin\bigl(2a(b-t)\bigr)\right] \mathrm{d}t$$

(c) Berechnen Sie nun das gesuchte Integral.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

LÖSUNG: (a) Zunächst beobachten wir, dass das zu untersuchende Integral wegen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\right| \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} \left|\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\right| \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\right| \mathrm{d}x \\ &\le \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

sowohl in ∞ als auch in $-\infty$ absolut konvergiert und damit als uneigentliches Integral existiert. Außerdem gilt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x.$$

(b) Wir parametrisieren das in der Aufgabe beschriebene Rechteck durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ mit

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : [-a, a] \to \mathbb{C}, \quad &&\gamma_1(t) = t, \\ &\gamma_2 : [0, b] \to \mathbb{C}, &&\gamma_2(t) = a + t\mathrm{i}, \\ &\gamma_3 : [-a, a] \to \mathbb{C}, &&\gamma_3(t) = -t + b\mathrm{i}, \\ &\gamma_4 : [0, b] \to \mathbb{C}, &&\gamma_4(t) = -a + (b-t)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Nun ist die Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist (jeder Zyklus ist nullhomolog!) ist das Kurvenintegral dieser Funktion über jeden Zyklus Null nach dem Cauchyschen Integralsatz. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z^2}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} \mathrm{e}^{-z^2}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} \mathrm{e}^{-z^2}\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \int_0^b \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(a+t\mathrm{i})^2}\, \mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-(-t+b\mathrm{i})^2}\, \mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-(-a+(b-t)\mathrm{i})^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+t^2}\mathrm{e}^{-2at\mathrm{i}}\, \mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{b^2}\mathrm{e}^{2tb\mathrm{i}}\, \mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+(b-t)^2}\mathrm{e}^{2a(b-t)\mathrm{i}}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+t^2}\bigl(\cos(2at) - \mathrm{i}\sin(2at)\bigr)\, \mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{b^2}\bigl(\cos(2tb) + \mathrm{i}\sin(2tb)\bigr)\, \mathrm{d}t \\ &\qquad - \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+(b-t)^2}\left[\cos\bigl(2a(b-t)\bigr) + \mathrm{i}\sin\bigl(2a(b-t)\bigr)\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+t^2}\cos(2at)\, \mathrm{d}t + \int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+t^2}\sin(2at)\, \mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{b^2}\cos(2tb)\, \mathrm{d}t \\ &\qquad - \mathrm{i}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{b^2}\sin(2tb)\, \mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+(b-t)^2}\cos\bigl(2a(b-t)\bigr)\, \mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^b \mathrm{e}^{-a^2+(b-t)^2}\sin\bigl(2a(b-t)\bigr)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Alle verbliebenen Integrale sind nun rein reell. Wir nehmen auf beiden Seiten der Gleichung den Realteil. Dann verschwinden alle Integrale mit i davor und wir verbleiben mit

$$0 = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \int_0^b \mathrm{e}^{-a^2}\left[\mathrm{e}^{t^2}\sin(2at) + \mathrm{e}^{(b-t)^2}\sin\big(2a(b-t)\big)\right] \mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{b^2}\cos(2tb)\, \mathrm{d}t.$$

Damit gilt

$$\mathrm{e}^{b^2}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tb)\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2} + \int_0^b \mathrm{e}^{-a^2}\left[\mathrm{e}^{t^2}\sin(2at) + \mathrm{e}^{(b-t)^2}\sin\big(2a(b-t)\big)\right] \mathrm{d}t$$

(c) Das gesuchte Integral ergibt sich nun offensichtlich im Grenzwert $a \to \infty$. Dazu schätzen wir zunächst das letzte Integral ab. Es gilt für jedes $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^b \left|\mathrm{e}^{-a^2}\left[\mathrm{e}^{t^2}\sin(2at) - \mathrm{e}^{(b-t)^2}\sin\big(2a(b-t)\big)\right]\right| \mathrm{d}t &\le \mathrm{e}^{-a^2}\int_0^b \left[\mathrm{e}^{t^2}|\sin(2at)| + \mathrm{e}^{(b-t)^2}\left|\sin\big(2a(b-t)\big)\right|\right] \mathrm{d}t \\ &\le \mathrm{e}^{-a^2}\int_0^b \mathrm{e}^{b^2} + \mathrm{e}^{b^2}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-a^2}2b\mathrm{e}^{b^2} \to 0 \ (a \to \infty).\end{aligned}$$

Also gilt mit Verwendung des Hinweises

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tb)\, \mathrm{d}t &= \lim_{a\to\infty} \mathrm{e}^{b^2}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tb)\, \mathrm{d}t \\ &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \lim_{a\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-a^2}\left[\mathrm{e}^{t^2}\sin(2at) - \mathrm{e}^{(b-t)^2}\sin\big(2a(b-t)\big)\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + 0 = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

(H 2)

Beweisen Sie Satz 2.9 der Vorlesung:

Ist γ ein geschlossener Integrationsweg und gilt $\mathrm{spur}(\gamma) \subseteq B_r(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$, so gilt

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq B_r(z_0) \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus B_r(z_0) \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma).$$

Lösung: Es sei zunächst $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(z_0)$. Dann gilt

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi.$$

Da z nicht in der Kugel $B_r(z_0)$ liegt, ist die in diesem Integral integrierte Funktion holomorph auf eben dieser Kugel. Da Kugeln konvexe Mengen sind und γ ganz in dieser Kugel liegt, bekommen wir nun sogar mit dem Cauchy-Integralsatz aus II.1.4, dass

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi = 0$$

ist und damit gilt $z \in \mathrm{Ext}(\gamma)$.

Wir haben also $\mathbb{C} \setminus B_r(z_0) \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma)$ gezeigt.

Das impliziert nun auch $(\mathrm{Ext}(\gamma))^c \subseteq (\mathbb{C} \setminus B_r(z_0))^c$ und damit auch

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq (\mathrm{Ext}(\gamma))^c \subseteq (\mathbb{C} \setminus B_r(z_0))^c = (B_r(z_0)^c)^c = B_r(z_0),$$

was die erste zu beweisende Aussage ist.

(H 3)

(a) Bestimmen Sie für die folgende Laurentreihe den Haupt- und den Nebenteil, sowie ihr Konvergenzgebiet (ohne Betrachtung des Konvergenzverhaltens auf dem Rand):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}.$$

(b) Geben Sie eine Laurentreihenentwicklung der Funktion $g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ für $|z| > 0$ an.

Lösung: (a) Es gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}}_{\text{Nebenteil}}$$

Zur Untersuchung der Konvergenz von Haupt- und Nebenteil verwenden wir jeweils das Wurzelkriterium. Für den Nebenteil liefert das sofort mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^n}{3^n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-1|}{\sqrt[n]{3^n+1}} = \frac{|z-1|}{3}$$

Dieser Wert ist kleiner als 1 (und der Nebenteil damit konvergent), genau dann wenn $|z-1| < 3$ ist und größer als 1 (und der Nebenteil damit divergent), falls $|z-1| > 3$ ist.

Den Hauptteil formen wir noch zu einer Reihe mit positiven Summationsindizes um:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-1)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3^{-n}+1)(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(1+3^n)(z-1)^n}.$$

Wir verwenden wieder das Wurzelkriterium für Reihen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{(1+3^n)(z-1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{1+3^n}|z-1|} = \frac{1}{|z-1|}.$$

Damit haben wir Konvergenz des Hauptteils für $1/|z-1| < 1$, d.h. für $|z-1| > 1$ und Divergenz für $|z-1| < 1$.

Das offene Konvergenzgebiet ist also die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 3\}$.

(b) Mit der Potenzreihenentwicklung des Sinus bekommen wir für alle $z \neq 0$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-n-1}}{(-2n-1)!} z^{2n+1},$$

d.h. eine Laurentreihe ganz ohne Nebenteil.