Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 9./10.12.2008

Analysis III – Funktionentheorie

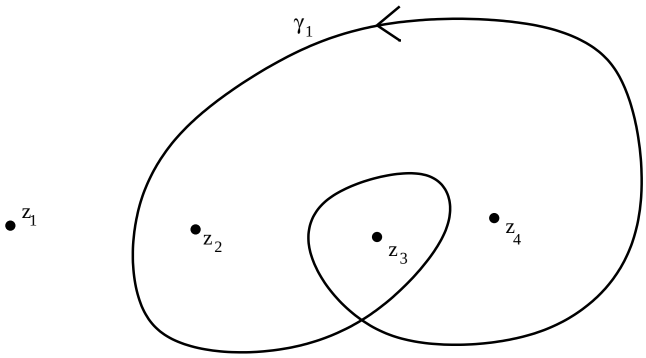
5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

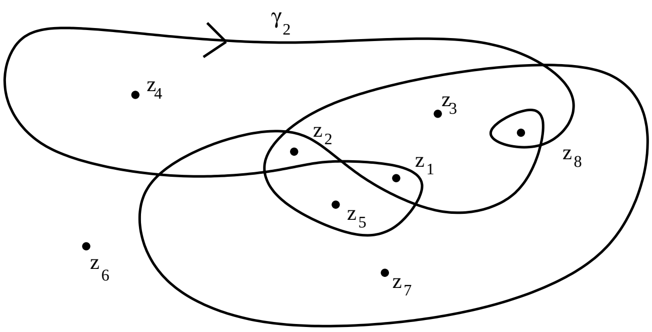
(G 1)

Bestimmen Sie die Umlaufzahl für die Punkte in der Skizze bezüglich der angegebenen Wege γ_1 bzw. γ_2.

(a) Weg γ_1:



(b) Weg γ_2:



Hinweis: Sie können auch das Resultat aus der H1 verwenden.

LÖSUNG: (a)

i	1	2	3	4
$I(\gamma_1, z_i)$	0	1	2	1

(b)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I(\gamma_1, z_i)$	1	1	0	-1	2	0	1	-1

(G 2)

(a) Wir schreiben $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt?

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$ auf G. Zeigen Sie, dass dann eine reelle Zahl c existiert mit $f(z) = g(z) + c\mathrm{i}$ für alle $z \in G$.

LÖSUNG: (a) Eine solche Funktion kann es nicht geben, denn nach Satz 5.6 ist der Realteil jeder holomorphen Funktion harmonisch. Für $g(x, z) = \mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt aber

$$\Delta g(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

(b) *1. Beweis (für Theorie-Liebhaber):* Wir betrachten $h := f - g$. Dann ist auch h in G holomorph und es gilt $\mathrm{Re}(h(z)) = \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(g(z)) = 0$ für alle $z \in G$. Also ist $h(G) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$. Nun enthält die imaginäre Achse aber, außer der leeren Menge, keine Gebiete. Also muss nach dem Satz über die Gebietstreue die Funktion h konstant sein. Damit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c\mathrm{i} = h(z) = f(z) - g(z)$ für alle $z \in G$, woraus die Behauptung folgt.

2. Beweis (für Freunde des Rechnens): Es seien $u, v, w : G \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(g(z))$, sowie $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$ und $w(z) = \mathrm{Im}(g(z))$. Dann gilt $f = u + v\mathrm{i}$ und $g = u + w\mathrm{i}$. Da f und g holomorph sind, haben wir nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} v_y(z) &= u_x(z) = w_y(z), \quad \text{d.h. } v_y = w_y \quad \text{und} \\ v_x(z) &= -u_y(z) = w_x(z), \quad \text{d.h. } v_x = w_x. \end{aligned}$$

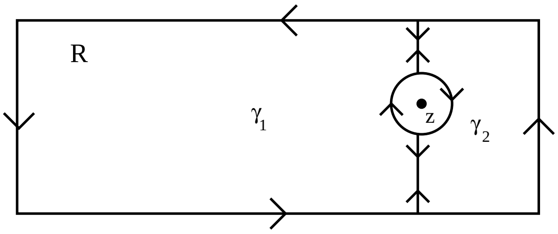
Damit haben v und w identische partielle Ableitungen, d.h. es gibt eine reelle Konstante c mit $v(z) = w(z) + c$ für alle $z \in G$ und damit auch $f(z) = u(z) + v(z)\mathrm{i} = u(z) + (w(z) + c)\mathrm{i} = g(z) + c\mathrm{i}$ für alle $z \in G$.

(G 3)

Für $a, b \in (0, \infty)$ sei $R := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\ z| < a,\ |\mathrm{Im}\ z| < b\}$ ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ und γ sei die Kurve, die den Rand von R in mathematisch positivem Sinne durchläuft. Zeigen Sie, dass für die Umlaufzahl $I(\gamma, z)$ gilt:

$$I(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & : \quad z \in R, \\ 0 & : \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R}. \end{cases}$$

LÖSUNG: Sei zunächst $z \in R$ und $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(z) \subseteq R$ gilt. Das geht, da R offen ist. Mit diesem Kreis splitten wir den Weg γ wie folgt:



Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi\mathrm{i}I(\gamma, z) &= \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 2\pi\mathrm{i}I(\gamma_1, z) + 2\pi\mathrm{i}I(\gamma_2, z) + \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

Da die Umlaufzahlen von γ_1 und γ_2 um z offensichtlich Null sind, bleibt damit mit der bekannten Umlaufzahl für Kreise

$$I(\gamma, z) = I(\partial B_r(z), z) = 1.$$

Befindet sich z außerhalb von $\overline{R}$, so gibt es eine konvexe Umgebung von R, deren Abschluss z nicht enthält, z.B. ein minimal größeres ähnliches Rechteck. Auf dieser ist dann die Funktion $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ holomorph und nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

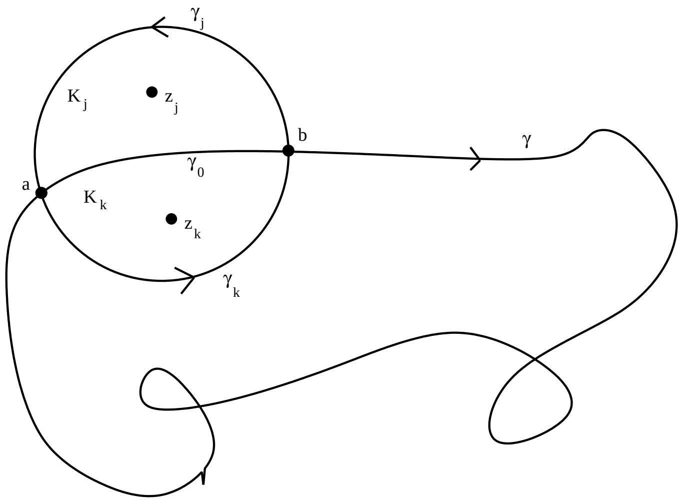
$$I(\gamma, z) = 2\pi \mathrm{i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = 0.$$

Hausübungen

(H 1)

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z_j, z_k \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, es existiert ein doppelpunktfreier, geschlossener Weg γ', der γ in genau zwei Punkten a und b schneidet und in dessen Inneren die Punkte z_j, z_k liegen. Den Teilweg von γ, der von a nach b führt bezeichnen wir mit γ_0. Zeigen Sie, falls z_j und z_k auf unterschiedlichen Seiten von γ_0 liegen, dann unterscheiden sich die Umlaufzahlen $I(\gamma, z_j)$ und $I(\gamma, z_k)$ nur um den Wert ± 1, je nachdem in welcher Richtung (mathematisch positiv oder negativ) der Weg γ durchlaufen wird.

Sie können sich die Situation folgendermaßen vorstellen:



Hier ist $\gamma' = \gamma_j \cup \gamma_k$.

LÖSUNG: Sei γ_0 der Teilweg von γ, der von a nach b führt und γ_1 der Restweg von b nach a. Dann liegen z_j und z_k beide im Inneren des geschlossenen Weges $\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}$, d.h. die Umlaufzahlen $I(\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}, z_j)$ und $I(\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}, z_k)$ stimmen überein. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
I(\gamma, z_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}} \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j \cup \gamma_0} \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}} \frac{1}{z - z_k} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j \cup \gamma_0} \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^{-1} \cup \gamma_k} \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}} \frac{1}{z - z_k} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j \cup \gamma_k} \frac{1}{z - z_j} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_j^{-1}} \frac{1}{z - z_k} \, \mathrm{d}z + 1 \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_0} \frac{1}{z - z_k} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^{-1} \cup \gamma_j^{-1}} \frac{1}{z - z_k} \, \mathrm{d}z + 1 = I(\gamma, z_k) + 1.
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Weg γ^{-1}, d.h. γ wird im mathematich positiven Sinne durchlaufen, dann erhält man analog $I(\gamma, z_l) = I(\gamma, z_k) - 1$.

(H 2)

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2(\cos 2t)e^{it}$. Skizzieren Sie die Spur von γ und berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1}\, dz.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

LÖSUNG: Skizze:

Es gilt (Partialbruchzerlegung):

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i1} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$A = -\frac{1}{4i}, \quad B = \frac{1}{4i}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = -\frac{1}{4}$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^4-1}\, dz &= -\frac{1}{4i}\int_\gamma \frac{1}{z-i}\, dz + \frac{1}{4i}\int_\gamma \frac{1}{z+i}\, dz + \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz - \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{1}{z+1}\, dz \\
&= 2\pi i\left[-\frac{1}{4i}I(\gamma, i) + \frac{1}{4i}I(\gamma, -i) + \frac{1}{4}I(\gamma, 1) - \frac{1}{4}I(\gamma, -1)\right] \\
&= 2\pi i\left[-\frac{1}{4i} + \frac{1}{4i} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = 0.
\end{aligned}$$

(H 3)

Es sei $G := \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ die sogenannte längs der negativen reellen Achse "geschlitzte Ebene". Für $w \in G$ deifinieren wir den Logarithmus $\log w$ durch

$$\log w := \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = w$. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig vom Integrationsweg γ ist, und dass diese Definition mit Kapitel II Definition 4.1 übereinstimmt.

LÖSUNG: Sei $\gamma : [0,1] \to G$ ein Integrationsweg mit $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = w$. Wir schreiben $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ mit $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz &= \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{u'(t) + iv'(t)}{u(t) + iv(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{(u'(t) + iv'(t))(u(t) - iv(t))}{u^2(t) + v^2(t)}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{u(t)u'(t) + v(t)v'(t)}{u^2(t) + v^2(t)}\, dt + i\int_0^1 \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{u^2(t) + v^2(t)}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\log(u^2(t) + v^2(t))\Big|_0^1 + i \arctan\frac{v(t)}{u(t)}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log|w|^2 + i\arctan\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w} \\
&= \log|w| + i\arg w
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Definition unabhängig vom gewählten Weg ist und mit Kapitel II Definition 4.1 übereinstimmt.