Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 25./26.11.2008

Analysis III – Funktionentheorie

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Minimumprinzip)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine holomorphe Funktion auf G, die nicht konstant ist.

(a) In $z_0 \in G$ habe $|f|$ ein lokales Minimum. Zeigen Sie, dass dann $f(z_0) = 0$ gilt.

(b) Das Gebiet G sei beschränkt, und f habe eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$. In G habe f keine Nullstellen. Zeigen Sie, dass dann $|\tilde{f}|$ sein Minimum auf dem Rand ∂G annimmt.

(c) *Zusatzaufgabe:* Gewinnen Sie daraus einen neuen Beweis für die Tatsache, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt (vgl. Fundamentalsatz der Algebra, Kapitel II, Satz 2.8).

LÖSUNG: (a) Wäre $f(z_0) \neq 0$, so hätte f auf einer offenen Umgebung U von z_0 keine Nullstelle. Dann wäre $g\colon U \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ holomorph, und der Betrag von g hätte in z_0 ein lokales Maximum, was dem Maximumprinzip widerspricht (da mit f auch g nicht konstant ist, als Folgerung des Identitätssatzes).

(b) Wenn $\tilde{f}$ Nullstellen hat, dann liegen diese per Voraussetzung auf ∂G, und $|\tilde{f}|$ wird dort minimal. Andernfalls ist $1/\tilde{f}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G, so dass $\left|1/\tilde{f}\right|$ nach dem Maximumprinzip in einem $z_0 \in \partial G$ sein Maximum annimmt. Dann wird $|\tilde{f}|$ in z_0 minimal.

(c) Es sei p ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Analog zum Beweis von Kapitel II, Satz 2.8 kann man zeigen, dass

$$p(z) \geq \frac{3}{4}|a_n|r^n \quad \text{für} \quad |z| \geq r := \max_{0 \leq k \leq n}(4n\left|\frac{a_k}{a_n}\right|) > 1$$

gilt. Insbesondere gilt also $p(z) \geq 3|a_0| = 3|p(0)|$ für $z \geq r$. Somit nimmt die Funktion $|p|_{\overline{U_r(0)}}|$ ihr Minimum also nicht auf $\partial U_r(0)$ an. Nach (b) muss p in $U_r(0)$ eine Nullstelle haben.

(G 2) (Komplexer Logarithmus)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist f ein Zweig des Logarithmus auf G, dann ist f holomorph und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(b) Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus genau dann, wenn $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf G besitzt.

LÖSUNG: (a) Wegen $e^{f(z)} = z$ ist $e^{f(z)}$ holomorph auf G. Für ein $z_0 \in G$ erhält man

$$1 = \frac{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}}{z - z_0} = \frac{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(z) \to f(z_0)$ für $z \to z_0$ und daher

$$\frac{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}}{f(z) - f(z_0)} \to e^{f(z_0)} = z_0 \quad \text{für} \quad z \to z_0.$$

Somit existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

und es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}} = e^{-f(z_0)} = \frac{1}{z_0}.$$

Daraus folgt, dass f auf G holomorph ist und dass $f'(z) = 1/z$ gilt.

(b) "$\Rightarrow$". Sei f ein Zweig des Logarithmus auf G. Nach Teil (a) ist f holomorph und $f'(z) = 1/z$. Somit besitzt $1/z$ eine Stammfunktion.
"$\Leftarrow$". Sei f eine Stammfunktion zu $1/z$, also $f'(z) = 1/z$. Wir definieren

$$g(z) := e^{f(z)}, \quad z \in G.$$

Da g eine Komposition von holomorphen Funktionen ist, folgt dass g auf G ebenfalls holomorph ist. Nach der Kettenregel gilt

$$g'(z) = (e^{f(z)})' = f'(z)e^{f(z)}) = \frac{1}{z}g(z).$$

Ein Potenzreihenansatz für g liefert

$$g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1}.$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k-1) a_k z^{k-1} = 0 \quad \text{für alle} \quad z \in G.$$

Somit folgt $a_k = 0$ für alle $k \neq 1$, d.h. $g(z) = a_1 \cdot z$. Wir können nun $a_1 = e^{\omega}$ für ein $\omega \in \mathbb{C}$ schreiben und erhalten $e^{f(z)} = e^{\omega} z$. Also ist $e^{f(z)-\omega} = z$, d.h. $f(z) - \omega$ ist ein Zweig des Logarithmus auf G.

(G 3) (Lemma von Schwarz)

Beweisen Sie das Lemma von Schwarz (Kapitel II, Satz 3.12):
Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Dann gilt

1. $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$ und
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Ferner gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $|f'(0)| = 1$ und genau dann, wenn $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt.

LÖSUNG: Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Nach Kapitel II, Satz 3.3 ist f in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \geq 1$ entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Wegen $f(0) = 0$ gilt $a_0 = 0$ und somit

$$f(z) = z \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} =: z \cdot g(z).$$

Die Funktion g ist als Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \geq 1$ holomorph in D. Für festes $c \in (0,1)$ ist

$$\max_{|z|=1} |g(z)| = \max_{|z|=1} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=1} \frac{|f(z)|}{c} \leq \frac{1}{c}.$$

Aus dem dem Maximumsprinzip folgt nun

$$|g(z)| \leq \frac{1}{c} \quad \text{für alle} \quad |z| \leq c.$$

Lassen wir nun $c \to 1$ gehen, folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$ und somit $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$. Für die Ableitung ergibt sich

$$|f'(0)| = \left| \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \right| = |\lim_{z \to 0} g(z)| = |g(0)| \leq 1.$$

Somit sind die Aussagen (a) und (b) bewiesen. Falls $|f'(0)| = 1$ dann gilt $|g(0)| = 1$. Also nimmt g sein Betragsmaxiumum im Inneren von D an. Das Maximumsprinzip liefert nun, dass g eine konstante Funktion mit Betrag 1 ist, d.h. $g(z) = \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Also ist $f(z) = \lambda$. Hieraus folgt natürlich sofort $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in D$ und $|f'(0)| = 1$.
Falls $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ dann folgt $|g(z_0)| = 1$. Nun folgt analog zu oben, dass $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.

Hausübungen

(H 1) (Holomorphe Fortsetzung / Reell-analytische Funktionen)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass f holomorph fortsetzbar ist, d.h. dass es ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und ein holomorphes $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F|_I = f$ gibt.

(b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, so dass die Funktion

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

eine holomorphe Fortsetzung auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ hat?

LÖSUNG: (a) Sicherlich muss $f : I \to \mathbb{C}$ unendlich oft stetig deffernzierbar sein, um die Bedingung in der Aufgabenstellung zu erfüllen. Wir nennen eine unendlich oft stetig differnzierbar Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ reell-analytisch, wenn zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$ gegen f konvergiert. Aus Kapitel II, Theorem 3.4. folgt sofort, dass dies eine notwendige Bedingung ist, damit f holomorph fortsetzbar ist. Wir werden nun zeigen,

dass diese Bedingung sogar hinreichend ist.
Sei $x_0 \in I$ und die Taylorreihe konvergiere auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$ gegen f. Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta^n$ eine Nullfolge ist, konvergiert für $z \in U_{\delta(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{C}$, die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta^n \left(\frac{z - x_0}{\delta}\right)^n.$$

Weil die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist, ist $G := \bigcup_{x_0 \in I} U_{\delta(x_0)}(x_0)$ offen. Auf G definieren wir die Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n, \quad \text{falls} \;\; z \in U_{\delta(x_0)}(x_0).$$

Wir müssen zeigen, dass F wohldefiniert ist. Sei $z \in U_{\delta(y_0)}(y_0) \cap U_{\delta(x_0)}(x_0)$. Für $x \in U_{\delta(y_0)}(y_0) \cap U_{\delta(x_0)}(x_0) \cap \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(x - y_0)^n.$$

Also stimmen die beiden Reihenwerte auf $U_{\delta(y_0)}(y_0) \cap U_{\delta(x_0)}(x_0) \cap \mathbb{R}$ überein (was natürlich einen Häufungspunkt hat) und beide sind Potenzreihen und somit holomorph. Nach dem Identitätssatz (Kapitel II, Satz 3.7) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(z - y_0)^n$$

und F is wohldefiniert. Nach Satz 1.4 ist F auf G holomorph. Nach Konstruktion gilt $F|_I = f$.

(b) Es gilt $g((\pi n)^{-1}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gäbe es eine holomorphe Fortsetzung von g auf D, dann hätte die Nullstellenmenge $g^{-1}(\{0\}) := \{z \in D : f(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt in D. Aus Kapitel II, Korollar 3.6 folgt, dass dann $g \equiv 0$ gelten muss. Damit ist $f \equiv 0$ die einzige Funktion, die die angegebene Bedingung erfüllt.

(H 2)

(a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 0$ (das Produkt $f \cdot g$ sei also konstant 0). Zeigen Sie, dass dann $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$ gelten muss.

(b) Geben Sie zwei verschiedene holomorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ und eine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise verschiedener komplexer Zahlen so an, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Widerspricht dies dem Identitätssatz (Kapitel II, Satz 3.7)?

Lösung: (a) Sei $f(z) \cdot g(z) = 0$ für alle $z \in G$. Wir nehmen an, dass $f \not\equiv 0$, d.h. es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) \neq 0$. Da f stetig ist gibt es eine ganze Umgebung U von z_0 mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Wegen $f(z) \cdot g(z) = 0$ für alle $z \in G$, muss $g(z) = 0$ für alle $z \in U$ gelten. Aus dem Idenditätssatz (Kapitel II, Satz 3.7) folgt daraus $g \equiv 0$.

(b) Nach dem Identitätssatz darf $\lim_{n\to\infty} z_n$ nicht in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ liegen (sonst wäre $f = g$), es muss also $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ sein. Für ein Beispiel der gesuchten Art können wir z.B.

$$z_n := \frac{1}{n}$$

und die holomorphen Funktionen $f, g \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := e^{\frac{2\pi i}{z}}, \qquad g(z) := e^{\frac{4\pi i}{z}}$$

wählen. Dann ist $f(z_n) = e^{2\pi in} = 1 = e^{4\pi in} = g(z_n)$, für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$; weiter ist offensichtlich $f \neq g$. Da der Häufungspunkt 0 der unendlichen Menge $\{\frac{1}{n} : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ ausserhalb des Gebiets $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ liegt, ist der Identitätssatz nicht anwendbar, die Existenz der zwei verschiedenen Funktionen f und g widerspricht ihm also nicht.

(H 3) (Komplexer Logarithmus / Wurzel)

Geben Sie ein möglichst großes Gebiet an, auf dem man $z \mapsto \sqrt{\log z}$ definieren kann.

LÖSUNG: Es gilt $\log(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} =: G$. Es sei nun $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset G$. Da

$$\int_{\partial \overline{D}} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i,$$

besitzt $1/z$ auf G keine Stammfunktion und somit exisitiert nach G2 auch kein Zweig des Logarithmus auf G. Wir müssen also eine Linie, z.B. $(-\infty, 0]$ aus G herausnehmen. Es gilt $\exp(G \setminus (-\infty, 0]) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Auf $G \setminus (-\infty, 0]$ hat $1/z$ eine Stammfunktion und somit exisiert auch ein Zweig des Logarithmus auf $G \setminus (-\infty, 0]$, d.h. es existiert ein $g : G \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = z$. Nun lässt sich $f(z) = \sqrt{\log z}$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ durch $\sqrt{\log z} = e^{1/2 g(\log z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ definieren.