Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 11./12.11.2008

Analysis III – Funktionentheorie

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

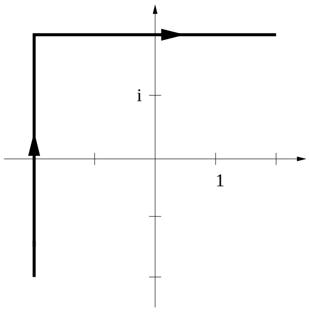
(a) Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z, \quad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{i}(t^3 - t^7)\cos(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\pi} - (t-1)^5 + (\pi - 1)t,\ t \in [0,1].$$

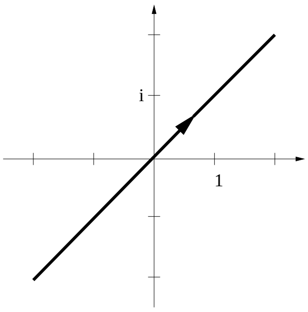
(b) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1-\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 1, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi,$$

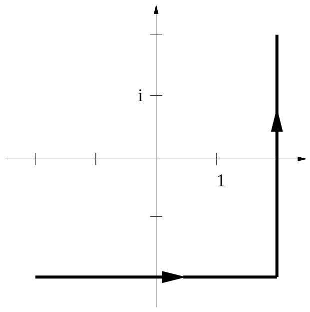
wobei die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durch



γ_1

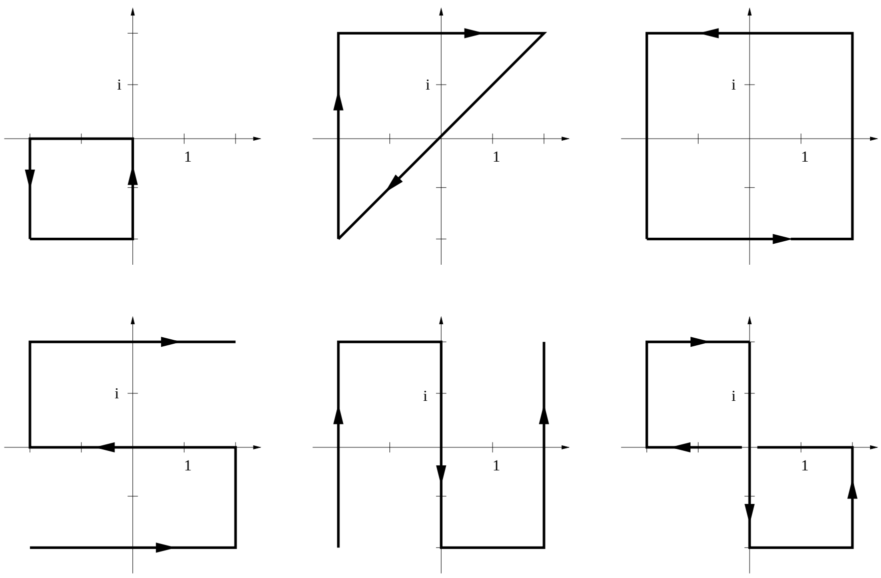


γ_2



γ_3

gegeben sind. Bestimmen Sie die Kurvenintegrale von f entlang der folgenden Wege:



LÖSUNG: (a) Die Sinusfunktion hat auf dem konvexen Gebiet $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion, nämlich $-\cos$. Damit gilt mit Satz I.3.8

$$\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z = -\cos(\gamma(1)) + \cos(\gamma(0)) = -\cos(1+\pi-1) + \cos(-1-(-1)^5)$$
$$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$$

(b) Wir bezeichnen die sechs Wege, für die das Kurvenintegral gesucht ist, zeilenweise mit $\gamma_a, \gamma_b, \dots, \gamma_f$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

denn f ist holomorph auf dem konvexen Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : -3/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2,\ -3/2 < \mathrm{Im}(z) < 1/2\}$, das die Spur von γ_a enthält. Damit gilt obiges nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Der Weg γ_b ist aus γ_1 und dem Rückweg von γ_2 zusammengesetzt. Es gilt also

$$\int_{\gamma_b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 1 - \mathrm{i}.$$

Genauso gilt

$$\int_{\gamma_c} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi - 1.$$

Zur Bearbeitung des vierten Wegs, sei γ_4 der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 2, $2+2\mathrm{i}$ und 0 (Damit ist auch im Folgenden immer gemeint, dass die Punkte in dieser Reihenfolge durchlaufen werden sollen und der Weg im ersten Punkt, also hier 2 beginnt und endet.) und γ_5 jener des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, $-2-2\mathrm{i}$ und -2. Dann gilt dank der Holomorphie von f außerhalb der Punkte $1-\mathrm{i}$ und $-1+\mathrm{i}$ wieder

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Außerdem ist (man beachte die Durchlaufrichtungen!):

$$\int_{\gamma_d} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_d} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi - \mathrm{i} + 1.$$

Für den fünften Weg findet man mit der gleichen Methode, dieses Mal unter Betrachtung der Wege γ_6 gegeben durch den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $2\mathrm{i}$, $2+2\mathrm{i}$ und 0, sowie γ_7 mit den Eckpunkten 0, $-2-2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$

$$\int_{\gamma_e} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 1 - \mathrm{i} + \pi.$$

Für den letzten Weg brauchen wir nun alle 4 Dreiecke von oben. Denn es gilt

$$\int_{\gamma_f} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_f} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_7} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi + 1 - 2\mathrm{i}.$$

(G 2)

Es sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|a| \neq 1$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(x) + a^2}\,\mathrm{d}x$$

existiert und berechnen Sie es.

Hinweis: Integrieren Sie $(z-a)^{-1}(z-a^{-1})^{-1}$ über die Einheitskreislinie.

LÖSUNG: Mit der Existenz des Integrals können wir ein Problem bekommen, wenn der Integrand unbeschränkt ist, d.h. wir müssen garantieren, dass der Nenner von Null wegbleibt. Da das Intervall $[0, 2\pi]$ kompakt und der Nenner stetig ist, reicht es sogar zu zeigen, dass es keine Kombination von x und a gibt, für die der Nenner Null wird.

Dazu beobachten wir

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = (1 - a\cos(x))^2 + a^2(1 - \cos^2(x)) = (1 - a\cos(x))^2 + (a\sin(x))^2$$

Diese Summe von positiven Zahlen kann nur Null werden, wenn beide einzeln Null sind. Das führt auf $a\cos(x) = 1$ und $a\sin(x) = 0$. Wegen $a \neq 0$ ist nur der Fall $\sin(x) = 0$ zu untersuchen. Dann ist aber $\cos(x)$ entweder 1 oder -1. In jedem Fall ist die Gleichung $a\cos(x) = 1$ nicht erfüllt, da $|a| \neq 1$ gilt.

Zur Berechnung des Integrals sei $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt (vgl. Hinweis)

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1/a)} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}a\,\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a)(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})} \\ &= \mathrm{i}a \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) - a^2 - 1} = -\mathrm{i}a \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2a\cos(t) + a^2}. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(x) + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{a} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)}.$$

Im Falle $|a| < 1$ verwenden wir nun die Cauchy-Integral-Formel für die in einer Umgebung des Einheitskreises holomorphe Funktion $f(z) := (z - 1/a)^{-1}$. Das ergibt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)} = f(a) = \frac{1}{a - 1/a} = \frac{a}{a^2 - 1}.$$

Ist $|a| > 1$, so können wir die Cauchy-Integral-Formel für die Funktion $g(z) := (z-a)^{-1}$ betrachten, da nun diese in einer Umgebung des Einheitskreises holomorph ist. So erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)} = g(1/a) = \frac{1}{1/a - a} = -\frac{a}{a^2 - 1}.$$

Zusammengenommen gilt damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(x) + a^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{i}}{a} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)} = -\frac{2\pi}{a}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-1/a)} \\ &= \begin{cases} -\frac{2\pi}{a^2-1}, & \text{falls } |a| < 1, \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & \text{falls } |a| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(G 3)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ habe keine Nullstelle in G. Zeigen Sie, dass dann f einen *holomorphen Logarithmus* hat, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{e}^g = f$.

LÖSUNG: Mit f ist auch f' in G holomorph und da f nullstellenfrei ist, ist $1/f$ und damit auch die Funktion f'/f in G holomorph. Da G konvex vorausgesetzt ist, hat nach Satz II.1.3 die Funktion f'/f auf G eine Stammfunktion. Es gibt also ein $h \in \mathcal{H}(G)$ mit $h' = f'/f$ in G.

Mit der Kettenregel gilt für jedes $z \in G$

$$\big(f(z)\cdot \mathrm{e}^{-h(z)}\big)' = f'(z)\mathrm{e}^{-h(z)} + f(z)(-h'(z))\mathrm{e}^{-h(z)} = \mathrm{e}^{-h(z)}\left(f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Nun ist G ein Gebiet, insbesondere also zusammenhängend. Damit folgt aus obiger Gleichheit, dass $f\mathrm{e}^{-h}$ konstant ist. Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z)\mathrm{e}^{-h(z)} = c$ für alle $z \in G$.

Da f und die Exponentialfunktion nullstellenfrei sind, muss insbesondere $c \neq 0$ gelten. Damit gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^a = c$, nämlich $a = \ln(|c|) + \mathrm{i}\arg(c)$. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = c\mathrm{e}^{h(z)} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{h(z)} = \mathrm{e}^{a+h(z)}.$$

Wir setzen also $g(z) := a + h(z)$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(G)$ und erfüllt $f = \mathrm{e}^g$.

Hausübungen

(H 1) (Ein Nullstellenkriterium)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ und $r > 0$ seien so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ gilt. Weiter sei $f \in \mathcal{H}(D)$.

(a) Zeigen Sie in dieser Situation folgende Verschärfung von Korollar 2.6 der Vorlesung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

(b) Zeigen Sie: Gilt

$$|f(z_0)| < \min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\},$$

so besitzt f eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

LÖSUNG: (a) Da $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ ist, können wir die Argumentation aus dem Beweis von Korollar 2.6 einfach für r statt ϱ machen:

Nach der Cauchy-Integralformel gilt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} \,\mathrm{d}z \cdot \sup\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} \\ &= \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^{n+1}} \max\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} \\ &= \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}. \end{aligned}$$

(b) *Behauptung:* f hat mindestens eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

Beweis: Wir nehmen an, f hätte keine Nullstelle in dieser Menge. Dann hat f auch keine Nullstelle in $\overline{B_r(z_0)}$, denn in diesem Fall wäre $\min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\} = 0$ und damit nach Voraussetzung auch $f(z_0) = 0$, was aber nach Annahme nicht sein kann. Da f in D insbesondere stetig ist und $\overline{B_r(z_0)}$ kompakt ist, gibt es damit sogar eine Umgebung $U \subseteq D$ von $\overline{B_r(z_0)}$, in der f keine Nullstelle hat.

Damit ist die Funktion $1/f$ in U holomorph und wir können Teil (a) mit $n = 0$ auf diese Funktion anwenden. Das ergibt

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : z \in \partial B_r(z_0)\right\} = \frac{1}{\min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\}}$$

und damit

$$|f(z_0)| \geq \min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\},$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. $\square$

(H 2)

Es sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, so dass die Potenzreihe $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ den Konvergenzradius 1 hat und eine im Inneren des Konvergenzkreises holomorphe Funktion darstellt. Weiter sei $0 < r < 1$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = re^{\mathrm{i}t}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

Bemerkung: Wir werden noch sehen, dass die Voraussetzung an f, holomorph zu sein, unnötig ist, da jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph ist.

LÖSUNG: Wir betrachten die Funktion $g(z) := \frac{f(z)}{1-z}$. Diese ist nach Voraussetzung im offenen Kreis $B_1(0)$ holomorph. Also gilt mit der Cauchy-Integralformel für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Nun gilt aber nach Voraussetzung und mit der geometrischen Reihe

$$g(z) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\right).$$

Für $|z| < 1$ sind weiter beide Reihen absolut konvergent. Also erhalten wir mit dem Cauchy-Produkt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu\right) z^k, \qquad |z| < 1.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich nun durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe (Man beachte, dass auch diese dank des Cauchyproduktes wieder absolut konvergiert!)

$$g^{(n)}(0) = n! \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

und damit die Behauptung.

(H 3)

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \le |z|^n$, so ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > n$.

LÖSUNG: (a) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ eine Funktion, so gilt insbesondere $f(z) \in \mathbb{D}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Das bedeutet, dass $|f(z)| \le 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Ist also f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, so ist f eine beschränkte auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion. Nach dem Satz von Liouville ist dann f konstant. Die gesuchten Funktionen sind also alle konstanten Funktionen, deren konstanter Wert einen Betrag kleiner als Eins hat.

(b) Es sei $r > 0$ und $k > n$. Dann ist f nach Voraussetzung in einer Umgebung von $B_r(0)$ holomorph und damit gilt nach Aufgabe (H1) (a) und mit der Voraussetzung

$$|f^{(k)}(0)| \le \frac{k!}{r^k} \max\{|f(z)| : |z| = r\} \le \frac{k!}{r^k} r^n = k! r^{n-k}$$

für jedes $r > 0$. Da aber $\lim_{r\to\infty} r^{n-k} = 0$ gilt, ist damit $f^{(k)}(0) = 0$.