Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 28./29.10.2008

Analysis III – Funktionentheorie

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z)(z + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i})$ und $g(z) = \mathrm{e}^{|z|}$.

(a) Untersuchen Sie f und g auf reelle Differenzierbarkeit und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) In welchen Punkten sind f bzw. g komplex differenzierbar? Ist f bzw. g, gegebenenfalls nach Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{C}$, holomorph?

LÖSUNG: (a) Für $z = x+y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(z) = f(x+y\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(z)(z+\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}) = x(x+2y\mathrm{i}) = x^2 + 2xy\mathrm{i}$. Damit ist f reell differenzierbar und es gilt

$$f_x(z) = 2x + 2y\mathrm{i} \quad \text{und} \quad f_y(z) = 2x\mathrm{i} \quad \text{für alle } z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\big(f_x(z) - f_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}(2x + 2y\mathrm{i} + 2x) = 2x + y\mathrm{i} = z + \mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\big(f_x(z) + f_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}(2x + 2y\mathrm{i} - 2x) = y\mathrm{i} = \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Für g erhalten wir entsprechend $g(z) = g(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$. Damit ist g in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ reell differenzierbar mit

$$g_x(z) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x \quad \text{und} \quad g_y(z) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y.$$

Das führt für $z \neq 0$ auf

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{2}\big(g_x(z) - g_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{|z|}}{|z|}(x - y\mathrm{i})\right) = \frac{\mathrm{e}^{|z|}\overline{z}}{2|z|} \quad \text{und} \\
\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\big(g_x(z) + g_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{|z|}}{|z|}(x + y\mathrm{i})\right) = \frac{\mathrm{e}^{|z|}z}{2|z|}.
\end{aligned}$$

(b) Nach Satz 2.2 ist f in z_0 komplex differenzierbar, genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ gilt, d.h. genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist.

Damit ist f nach den Ergebnissen aus (a) genau dann in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$, also wenn $z \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion g ist hingegen in keinem $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar, denn $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$ ist für kein $z \neq 0$ Null.

Trotzdem ist f in keiner Weise holomorph, denn man spricht von einer holomorphen Funktion nur dann, wenn sie auf einer *offenen* Teilmenge von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist (vgl. die Definition von Holomorphie) und es gibt keine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die in der reellen Achse enthalten ist.

(G 2)

Es sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$ gegeben. Berechnen Sie für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z$.

LÖSUNG: Es gilt

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} (\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}})^m r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m+1)t} \, \mathrm{d}t.$$

Ist nun $n - m = -1$, so erhalten wir mit $n = m - 1$

$$\mathrm{i}r^{2m} \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi r^{2m}\mathrm{i},$$

in allen anderen Fällen gilt

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}r^{n+m+1} \frac{1}{\mathrm{i}(n-m+1)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Zusammengenommen gilt also

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi r^{2m}\mathrm{i}, & \text{falls } n = m-1, \\ 0, & \text{falls } n \neq m-1. \end{cases}$$

(G 3)

Es sei γ_1, γ_2 zwei Integrationswege, die durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen und $f : \mathrm{Spur}(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z$, wobei $\varepsilon = 1$ für eine orientierungserhaltende und $\varepsilon = -1$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation gilt.

LÖSUNG: Es seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ und $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ sei die Parametertransformation, die γ_1 in γ_2 überführt, d.h. es gilt $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Weiter sei $a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b_1$ eine Zerlegung des Intervalls $[a_1, b_1]$ derart, dass $\gamma_1|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt nach der Kettenregel selbiges auch für γ_2 auf den Intervallen $[\varphi^{-1}(t_j), \varphi^{-1}(t_{j+1})]$ im Falle einer orientierungserhaltenden Transformation, bzw. den Intervallen $[\varphi^{-1}(t_{j+1}), \varphi^{-1}(t_j)]$ für eine orientierungsumkehrende Transformation.

Nun bekommen wir mit der Substitution $t = \varphi(s)$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f\big((\gamma_1 \circ \varphi)(s)\big)\gamma_1'\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s) \, \mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma_2(s))(\gamma_1 \circ \varphi)'(s) \, \mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s) \, \mathrm{d}s = \varepsilon \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s) \, \mathrm{d}s = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1)

Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f, g : \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für $c \in \mathbb{C}$

(a) $\displaystyle\int_\gamma (f+g)(z) \, \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z + \int_\gamma g(z) \, \mathrm{d}z,$ (b) $\displaystyle\int_\gamma cf(z) \, \mathrm{d}z = c \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z,$

(c) $\displaystyle\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).$

LÖSUNG: Es sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so dass $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ stetig differenzierbar ist.

(a) Es gilt nach den Rechenregeln für reelle Integrale

$$\begin{aligned}\int_\gamma \big(f(z) + g(z)\big)\ \mathrm{d}z &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))\big)\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(b) Genauso erhalten wir

$$\int_\gamma cf(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} cf(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t = c\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t = c\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z.$$

(c) Mit der Dreiecksungleichung für relle Integrale sehen wir

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t\right| \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\le \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t = \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).\end{aligned}$$

(H 2)

Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und $f^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Zeigen Sie $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ auf zwei verschiedene Weisen, einmal direkt über den Differenzenquotienten und einmal mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

LÖSUNG: *Differenzenquotient:*

Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\frac{f^*(z) - f^*(w)}{z - w} = \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{w})}}{z - w} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{w})}{\overline{z} - \overline{w}}\right)}.$$

Die komplexe Konjugation ist eine stetige Abbildung auf $\mathbb{C}$, also gilt

$$\lim_{w\to z} \frac{f^*(z) - f^*(w)}{z - w} = \lim_{w\to z} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{w})}{\overline{z} - \overline{w}}\right)} = \overline{\left(\lim_{w\to z} \frac{f(\overline{z}) - f(\overline{w})}{\overline{z} - \overline{w}}\right)}.$$

Nun ist f an der Stelle $\overline{z}$ komplex differenzierbar, also existiert obiger Grenzwert und es gilt

$$(f^*)'(z) = \overline{\left(\lim_{w\to z} \frac{f(\overline{z}) - f(\overline{w})}{\overline{z} - \overline{w}}\right)} = \overline{f'(\overline{z})}.$$

Damit ist f^* in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

Da f holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, ist $f = u+v\mathrm{i}$ reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$f^*(z) = (u + v\mathrm{i})^*(z) = \overline{(u + v\mathrm{i})(\overline{z})} = \overline{u(\overline{z}) + v(\overline{z})\mathrm{i}} = \overline{u(\overline{z})} + \overline{v(\overline{z})\mathrm{i}} = u(\overline{z}) - v(\overline{z})\mathrm{i}.$$

Damit gilt

$$f^*(x+y\mathrm{i}) = u(x-y\mathrm{i}) - v(x-y\mathrm{i})\mathrm{i} =: \tilde{u}(z) + \tilde{v}(z)\mathrm{i}$$

Das liefert uns zwei Dinge. Zum Einen ist dank der reellen Differenzierbarkeit von u und v damit auch f^* reell differenzierbar und zum Anderen gilt mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (s.o.)

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_x(z) = u_x(x-y\mathrm{i}) = v_y(x-y\mathrm{i}) = \partial_y(-v(x-y\mathrm{i})) = \partial_y\tilde{v}(z) = \tilde{v}_y(z) \quad \text{und}\\
&\tilde{u}_y(z) = \partial_y(u(x-y\mathrm{i})) = -u_y(x-y\mathrm{i}) = v_x(x-y\mathrm{i}) = \partial_x(v(x-y\mathrm{i})) = \partial_x(-\tilde{v}(z)) = -\tilde{v}_x(z).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt auch f^* die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$, d.h. f^* ist in $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

(H 3)

(a) Auf welchen offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ hat die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion?

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ konvex und offen, sowie $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{Im}(f'(z)) < 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Lösung: (a) *Behauptung:* Auf keiner offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ hat $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion.

Beweis: Wir nehmen an, die Funktion hätte auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F mit $F(z) = u(z) + v(z)\mathrm{i}$ und $u, v : D \to \mathbb{R}$. Dann muss $F'(z) = \mathrm{Re}(z)$ für alle $z \in D$ gelten. Das impliziert mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für alle $z = x + y\mathrm{i} \in D$

$$v_y(z) = u_x(z) = \mathrm{Re}(F'(z)) = \mathrm{Re}(z) = x \quad \text{und} \quad -u_y(z) = v_x(z) = \mathrm{Im}(F') = 0.$$

Das bedeutet insbesondere, dass u und v zwei Mal stetig reell differenzierbar sind und es gilt für die zweiten Ableitungen von v nach dem Satz von Schwarz

$$1 = v_{yx}(z) = v_{xy}(z) = 0,$$

womit wir einen Widerspruch haben.

Alternativer Beweis: Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Dann gibt es einen Kreis $B_{2r}(z_0) \subseteq D$ mit einem $r > 0$. Wir betrachten den geschlossenen Integrationsweg $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt $\gamma([0,2\pi]) \subseteq B_{2r}(z_0) \subseteq D$ und

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_\gamma (z+\overline{z})\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(z_0 + r\mathrm{e}^{it} + \overline{z_0} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\big) r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{Re}(z_0) r\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}r^2\mathrm{i}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)\,\mathrm{d}t = 0 + 0 + \frac{1}{2}r^2\mathrm{i}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t\\
&= r^2\pi\mathrm{i} \neq 0.
\end{aligned}$$

Also kann $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ keine Stammfunktion auf D haben.

(b) *Behauptung:* $G \subseteq \mathbb{C}$ konvex, offen, $f \in \mathcal{H}(G)$, $\mathrm{Im}(f') < 0$ in $G \Longrightarrow f$ ist injektiv.

Beweis: Seien $z, w \in G$ mit $z \neq w$. Dann liegt der gerade Verbindungsweg $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0,1]$, ganz in G dank der Konvexität. Die Funktion f' hat auf G offensichtlich die Stammfunktion f, also gilt mit Satz 3.8

$$f(w) - f(z) = \int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w-z)\,\mathrm{d}t = (w-z)\int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t.$$

Nun ist

$$\mathrm{Im}\Big(\int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t\Big) = \int_0^1 \mathrm{Im}\big(f'(\gamma(t))\big)\,\mathrm{d}t < 0, \quad \text{d.h.} \quad \int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Insbesondere ist also wegen $z \neq w$ auf jeden Fall $f(w) - f(z) \neq 0$ und damit $f(w) \neq f(z)$, was gerade die Injektivität bedeutet.