Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 14./15.10.2008

Analysis III – Funktionentheorie

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{i) } z = \overline{\frac{2+5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}}, \qquad \text{ii) } z = (1+\mathrm{i})^{8n+3}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{iii) } z = \sum_{k=0}^{101} (3\mathrm{i})^k, \qquad \text{iv) } z = \mathrm{Re}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\big).$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{C}$:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^n \qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{n!}, \qquad \text{iii) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k.$$

Lösung: (a) (i) $z = \overline{\frac{2+5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}} = \frac{(2-5\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{1}{5}(2 - 4\mathrm{i} - 5\mathrm{i} - 10) = -\frac{8}{5} - \frac{9}{5}\mathrm{i}.$

(ii) Mit Hilfe der Polardarstellung komplexer Zahlen erhalten wir

$$\begin{aligned} z = (1+\mathrm{i})^{8n+3} &= \big(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\big)^{8n+3} = \sqrt{2}^{8n+3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(8n+3)\pi/4} = \sqrt{2}^{8n+3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} \\ &= \sqrt{2}^{8n+3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} = 2^{4n+1}\big(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}\big) = 2^{4n+1}(-1+\mathrm{i}) = -2^{4n+1} + 2^{4n+1}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(iii) Die endliche geometrische Summe liefert

$$\begin{aligned} z = \sum_{k=0}^{101} (3\mathrm{i})^k &= \frac{1-(3\mathrm{i})^{102}}{1-3\mathrm{i}} = \frac{1 - 3^{102}\cdot \mathrm{i}^{25\cdot 4+2}}{1-3\mathrm{i}} = \frac{(1-3^{102}\cdot(-1))(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} \\ &= \frac{1+3\mathrm{i}+3^{102}+3^{103}\mathrm{i}}{10} = \frac{1+3^{102}}{10} + \frac{3+3^{103}}{10}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(iv) $z = \mathrm{Re}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\big) = 2\mathrm{Re}\big(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)\big) = 2\cos(\pi/3) = 1.$

(b) (i) Es gilt

$$\left|\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right| = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{25+1}} = \sqrt{\frac{10}{13}} < 1.$$

Also konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}})^n$, woraus folgt, dass die untersuchte Folge eine Nullfolge ist.

(ii) $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ ist eine achte Einheitswurzel. Da jede Zahl $n!$ für $n \geq 4$ durch acht teilbar ist, gilt

$$\big((1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\big)^{n!} = 1 \quad \text{für alle } n \geq 4.$$

Der gesuchte Grenzwert ist also 1.

(iii) Es ist $|(1+\mathrm{i})/2| = 1/\sqrt{2} < 1$, also konvergiert die untersuchte geometrische Reihe und nach der Formel für diese haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1+\mathrm{i}}{2}} - 1 = \frac{2}{2-(1+\mathrm{i})} - 1 = \frac{2}{1-\mathrm{i}} - 1 = \frac{2+2\mathrm{i}}{2} - 1 = \mathrm{i}.$$

(G 2)

(a) Für welche Punkte auf dem Rand ihres Konvergenzkreises konvergieren bzw. divergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n?$$

Geben Sie weiter eine Potenzreihe an, die auf dem Rand des Konvergenzkreises sowohl divergentes als auch konvergentes Verhalten aufweist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2$$

injektiv ist.

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1,$$

d.h. der Konvergenzradius der beiden Reihen ist nach der Formel von Cauchy-Hadamard jeweils 1. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben. Dann gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

was eine konvergente Majorante ist. Also ist die erste Potenzreihe auf dem gesamten Rand des Konvergenzkreises konvergent.

Im Falle der zweiten Potenzreihe beobachten wir, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ die summierte Folge konstant Betrag eins hat, insbesondere also keine Nullfolge sein kann. Damit konvergiert die zweite Potenzreihe an keinem Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises.

Betrachten wir schließlich die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, so hat diese ebenfalls Konvergenzradius eins (wie oben), und diese divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert für $z = -1$ (alternierende harmonische Reihe).

(b) Mit Hilfe der geometrischen Reihe gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$f(z) = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Seien nun $v, w \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ gegeben. Dann gilt dank $v \neq 1$ und $w \neq 1$

$$\begin{aligned} f(v) = f(w) &\iff \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{w}{(1-w)^2} \iff v(1-2w+w^2) = w(1-2v+v^2) \\ &\iff v + vw^2 = w + wv^2 \iff v - w = vw(v-w). \end{aligned}$$

Also ist dann entweder $v = w$ oder $vw = 1$. Dieser zweite Fall kann aber nicht eintreten, denn wegen $|v| < 1$ und $|w| < 1$ muss natürlich auch $|vw| < 1$ sein. Also ist $v = w$ und damit f injektiv.

(G 3)

(a) Geben Sie Wege $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ an, die jeweils die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie als Spur haben.

(b) Weiter betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$. Geben Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ an, das dieser Funktion entspricht, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, d.h. mit $F(x, y) = \big(\mathrm{Re}(f(x + y\mathrm{i})),\ \mathrm{Im}(f(x + y\mathrm{i}))\big)^T$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}.$$

LÖSUNG: (a) $\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad$ und $\quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$

tun das gewünschte.

(b) Es gilt für $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{i}.$$

Wir setzen also

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)^T.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\ \mathrm{dx} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}, \frac{-\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \right)^T \cdot \big(-\sin(t),\ \cos(t)\big)^T\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-2)\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = \cos^2(t)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Im}\big((1 - \mathrm{i})z\big) < 0\}$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Im}(z + \mathrm{i})\}$,

(iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2\mathrm{i}| + |z + 2\mathrm{i}| = 5\}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ seien Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Zeigen Sie, dass $|\frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_n}| \leq n$ ist und Gleichheit genau dann eintritt, wenn $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ gilt.

LÖSUNG: (a) (i) Mit $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Im}\big((1 - \mathrm{i})z\big) = \mathrm{Im}(x - x\mathrm{i} + y\mathrm{i} + y) = y - x.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Im}\big((1 - \mathrm{i})z\big) < 0\} &= \{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} : -1 < y - x < 0\} \\ &= \{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} : x - 1 < y < x\}. \end{aligned}$$

(ii) Mit $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|z| = \mathrm{Im}(z + \mathrm{i}) \iff \sqrt{x^2 + y^2} = y + 1$. Damit muss zunächst $y > -1$ sein und außerdem $x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1$, d.h. $x^2 = 2y + 1$. Wir erhalten also die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

(iii) Die Gleichung beschreibt alle die Punkte in $\mathbb{C}$, für die die Summe der Abstände von den festen Punkten $2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$ konstant fünf beträgt. Es handelt sich also um eine Ellipse mit Brennpunkten $2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$.

(b) *Behauptung:* Es gilt $|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}| \leq n$ und $(|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}| = n \iff z_1 = z_2 = \cdots = z_n)$.

Beweis: Zunächst gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$ auch $1 = |z^n| = |z|^n$, d.h. wir haben $|z| = 1$, da $|z| \in \mathbb{R}_+$ ist. Damit folgt einfach mit der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z_k|} = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Außerdem ist im Falle, dass $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ gilt offensichtlich

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right| = \left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_1}\right| = \left|n\frac{1}{z_1}\right| = n\frac{1}{|z_1|} = n.$$

Es bleibt also die Implikation $|\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}| = n \Longrightarrow z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ zu zeigen. Dazu machen wir folgende

Zwischenbehauptung: Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$ mit $|w_j| = 1$, $j = 1, \ldots, m$, so gilt $|\sum_{k=1}^m w_k| = m \Longrightarrow w_1 = w_2 = \cdots = w_m$.

Setzen wir dann $m = n$ und $w_j = 1/z_j$, $j = 1, \ldots, n$, erhalten wir die noch fehlende Implikation.

Beweis der Zwischenbehauptung: Wir machen eine Induktion nach m.

Für $m = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig, wir wenden uns also dem Induktionsschritt zu. Es sei die Aussage also für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen und es gelte

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} w_k\right| = m + 1.$$

Nehmen wir nun an, es wäre dann $|\sum_{k=1}^m w_k| < m$, so liefert die Dreiecksungleichung sofort

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} w_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{m} w_k\right| + |w_{m+1}| < m + 1$$

und damit einen Widerspruch. Also ist $|\sum_{k=1}^m w_k| = m$ und damit liefert die Induktionsvoraussetzung $w_1 = w_2 = \cdots = w_m$.

Wir haben also schon

$$\left|mw_1 + w_{m+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{m+1} w_k\right| = m + 1 = |mw_1| + |w_{m+1}|.$$

Mit $u = mw_1$ und $v = w_{m+1}$ gilt also $|u + v| = |u| + |v|$. Bezeichnen wir den Winkel zwischen u und v mit φ, also $\varphi = \arg(v) - \arg(u)$, so gilt damit

$$(|u| + |v|)^2 = |u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\cos(\varphi)|u| \cdot |v|,$$

d.h. es muss $\cos(\varphi) = 1$ sein. Damit haben wir aber $\varphi = 0$ (wobei wir die Argumente modulo 2π rechnen). Also ist $\arg(u) = \arg(v)$ und damit $\arg(w_1) = \arg(u) = \arg(v) = \arg(w_{m+1})$.

Das liefert mit

$$w_{m+1} = |w_{m+1}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(w_{m+1})} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(w_1)} = |w_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(w_1)} = w_1$$

die Zwischenbehauptung. $\square$

(H 2)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{7\mathrm{i}n^4+3n}{2n^4+n^3+\mathrm{i}}\right)^n z^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^n}z^{2n}$ mit $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}z^n$ mit $k\in\mathbb{N}$.

LÖSUNG: (a) Wir verwenden die Formel von Cauchy-Hadamard. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{7\mathrm{i}n^4+3n}{2n^4+n^3+\mathrm{i}}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{7\mathrm{i}n^4+3n}{2n^4+n^3+\mathrm{i}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{7\mathrm{i}+\frac{3}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{n^4}}\right|=\left|\frac{7\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{7}{2}.$$

Also ist der Konvergenzradius $2/7$.

(b) Zur Anwendung des Wurzelkriteriums für Reihen berechnen wir

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{c^n}z^{2n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^2}{|c|}=\frac{|z|^2}{|c|}.$$

Damit haben wir Konvergenz für $|z|^2/|c|<1$, d.h. $|z|<\sqrt{|c|}$ und Divergenz für $|z|^2/|c|>1$, d.h. $|z|>\sqrt{|c|}$, also ist der Konvergenzradius $\sqrt{|c|}$.

(c) Zur Anwendung des Quotientenkriteriums für Reihen berechnen wir

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{((n+1)!)^k}{(k(n+1))!}z^{n+1}}{\frac{(n!)^k}{(kn)!}z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^k(kn)!}{(k(n+1))!(n!)^k}\right||z|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^k}{(kn+1)(kn+2)\cdot\ldots\cdot(kn+k)}\right||z|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})(k+\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(k+\frac{k}{n})}|z|=\frac{1^k}{k^k}|z|=\frac{1}{k^k}|z|$$

Damit ergibt sich der Konvergenzradius zu k^k.

(H 3)

Es sei γ der Weg, der sich aus dem durch $\gamma_1(t)=(t^2,t)^T$, $t\in[0,1]$, parametrisierten Weg und dem Geradenstück von $(1,1)$ nach $(1,2)$ zusammensetzt. Weiter betrachten wir das Vektorfeld $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $F(x,y)=(2xy-x^2,\ x+y^2)^T$.

(a) Parametrisieren und skizzieren Sie γ.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}.$$

(c) Geben Sie eine komplexe Parametrisierung des selben Weges (gesehen als Funktion nach $\mathbb{C}$) an.

LÖSUNG: (a) Wir können z.B. $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ setzen als

$$\gamma(t)=\begin{cases}(t^2,t)^T, & t\in[0,1],\\ (1,t)^T, & t\in[1,2].\end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F(\mathrm{x})\ \mathrm{dx} &= \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (2t^3 - t^4,\ 2t^2)^T \cdot (2t,\ 1)^T\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (2t-1,\ 1+t^2)^T \cdot (0,\ 1)^T\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2\ \mathrm{d}t + \int_1^2 1 + t^2\ \mathrm{d}t = \frac{4}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{3} + \left(t + \frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right) \\
&= \frac{17}{15} + 2 + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{67}{15}.
\end{aligned}$$

(c) Eine komplexe Parametrisierung von γ ist gegeben durch $\tilde{\gamma} : [0,2] \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} t^2 + t\mathrm{i}, & t \in [0,1], \\ 1 + t\mathrm{i}, & t \in [1,2]. \end{cases}$$