



# Variationsrechnung

## 7. Übung

### Gruppenübung

**G 1** Zeigen Sie, wenn

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned}x &= x(s), & y &= y(s), \\u(s) &= u(x(s), y(s)), & c(s) &= c(x(s), y(s)) \\x'(s) &= a(x(s), y(s)), & y'(s) &= b(x(s), y(s))\end{aligned}$$

und

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

gilt, dann

$$u'(s) = c(s)$$

mit

$$u(0) = u(x_0, y_0)$$

gilt.

**G 2** [Clairautsche Differentialgleichung]

$$xu'(x) - u(x) = f(u'(x)) \quad (\star)$$

1. Transformieren Sie  $(\star)$  mit Hilfe der Legendretransformation in

$$u^*(y) = f(y).$$

*Hinweis:*  $f^*(\nabla f(x)) = x\nabla f(x) - f(x)$ .

2. Lösen Sie  $(\star)$  mit

- (a)  $f(x) = x^2$ ,
- (b)  $f(x) = x^4$ ,
- (c)  $f(x) = e^x$ ,
- (d)  $f(x) = \ln x, x > 0$ .

### Hausübung

**H 1** Lösen Sie die 2-dimensionelle Clairautsche Gleichung

$$xu_x + yu_y - u = f(u_x, u_y)$$

mit  $f(x) = |x|^2$ .