Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Przemysław Kamiński

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

25.06.2009

# Variationsrechnung

## 6. Übung

### Gruppenübung

### G 1 [Berührungstransformation]

1. Es sei eine stetig differenzierbare Vektorfeld

$$(x, p, z) \mapsto (X(x, p, z), P(x, p, z), Z(x, p, z)) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

und eine stetige Funktion

$$(x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

gegeben. Man bestimme Bedingungen an $X, P, Z$ und $\rho$, so dass für alle stetig differenzierbaren Funktionen

$$t \mapsto (x(t), p(t), z(t)) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

die Gleichung

$$\frac{dZ}{dt} - P\frac{dX}{dt} = \rho\left(\frac{dz}{dt} - p\frac{dx}{dt}\right) \qquad (\star)$$

erfüllt ist, wobei

$$\begin{aligned} X(t) =& X(x(t), p(t), z(t)), \\ P(t) =& P(x(t), p(t), z(t)), \\ Z(t) =& Z(x(t), p(t), z(t)), \\ \rho =& \rho(x(t), p(t), z(t)) \end{aligned}$$

seien.

2. Man gebe ein explizites Beispiel für die Abbildungen

$$(x, p, z) \mapsto (X, P, Z) \quad \text{und} \quad (x, p, z) \mapsto \rho$$

an, so dass $(\star)$ gilt. (Man denke an die Legendretransformation). Gibt es weitere Beispiele?

3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben, sei

$$z(t) = f(x(t)), \quad p(t) = f'(x(t)).$$

Zeige, dass dann

$$\frac{dZ(t)}{dt} - P(t)\frac{dX(t)}{dt} = 0$$

gilt.