Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
17./19./22.06.09

9. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)"

Gruppenübung

Aufgabe G28 (TSP und Lagrange-Relaxierung)

Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit $|V| = n$ Knoten und Kantengewichten c_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$. Wir betrachten das folgende ganzzahlige Programm, welches eine Formulierung für das symmetrische Traveling Salesman-Problem (TSP) auf G ist:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} && (1)\\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \quad i = 1, ..., n && (2)\\
& \sum_{i<j} x_{ij} = n && (3)\\
& \sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \subseteq V\backslash\{1\},\ |S| \geq 3 && (4)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall\, i, j = 1, ..., n,\ i \neq j. && (5)
\end{aligned}
$$

In Ungleichung (4) ist mit $\gamma(S)$ die Menge aller Kanten gemeint, welche je zwei Knoten in S verbinden.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Nebenbedingungen (2) für $i = 2, ..., n$ an.

b) Welche Eigenschaften haben die zulässigen Lösungen des relaxierten Problems im Vergleich zu einer Tour?

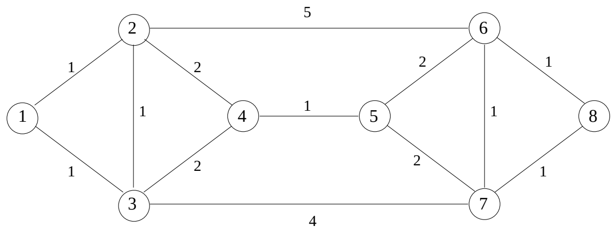
c) Bringen Sie die Lagrange-Relaxierung aus Aufgabenteil a) in eine Form, die es erlaubt, die Berechnung von $L(\lambda)$ auf die Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes (siehe Aufgabenteil b)) zurückzuführen. Modifizieren Sie dazu die Kantengewichte c geeignet.

d) Bestimmen Sie die Optimallösung des relaxierten TSP zu $\lambda = 0$ für folgenden Graphen G:

Aufgabe G29 (Greedy-Algorithmus)

Für das Problem, gegebene Geldbeträge mit möglichst wenigen Münzen und Scheinen auszuzahlen, wird der Greedy-Algorithmus angewendet, der für den jeweiligen Restbetrag immer die größtmögliche Münze bzw. den größtmöglichen Schein auszahlt und dann iteriert.

(a) Zeige, dass der Greedy-Algorithmus für das Euro/Cent-System die Optimallösung liefert.



(b) Gilt dies immer noch, wenn zusätzlich 30-Cent-Münzen bzw. 40-Cent-Münzen eingeführt würden?

Tipp: Sei $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein Münzsystem mit $a_i \in \mathbb{N}$, $a_1 = 1$, $a_i < a_{i+1}$, und bezeichne $G(x)$ die Lösung, die der Greedy-Algorithmus für einen Betrag $x \in \mathbb{N}$ liefert. Eine Münze a_j hat die *Greedy-Eigenschaft*, falls für alle Folgen $(b_1, \ldots, b_r)$ mit $b_k \in \{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$ für $k = 1, \ldots, r$ und $r \geq 2$ sowie o.B.d.A. $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_r$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} b_i > a_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{r-1} b_i < a_j$$

gilt:

$$G\left(\sum_{i=1}^{r} b_i\right) \leq r.$$

Zeige und benutze die folgende Aussage:
G liefert die Optimallösung genau dann, wenn alle Münzen die Greedy-Eigenschaft haben.

Aufgabe G30 (Lokale Suche)

Betrachte das 0/1-Rucksack-Problem

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & a^T x & \leq & b \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array}$$

für

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b = 5,\ c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ b = 21,\ c = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 1 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Bestimme zunächst mit dem Greedy-Algorithmus jeweils eine Startlösung und versuche dann diese mittels lokaler Suche zu verbessern.
Bemerkung: Der Optimalwert der ersten Instanz ist 10 und der der zweiten 38.

Hausübung

Aufgabe H26 (Matroide)

Gegeben sei eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{I}$ die Menge der (über $\mathbb{R}$) affin unabhängigen Teilmengen von S.

(a) Weise nach, dass $(S, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

(b) Sei nun

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Löse das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\max_{X \in \mathcal{I}} \left\{ \sum_{x \in X} x_1^2 \cdot x_3 \right\}.$$

Aufgabe H27 (Lokale Suche)

Betrachte den in Abbildung 1 dargestellten Graphen. Es soll mit Heuristiken eine möglichst große

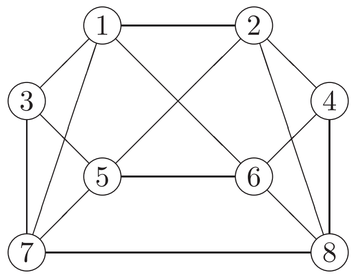


Abbildung 1: Eine Stabile-Mengen-Instanz

stabile Menge in dem Graphen gefunden werden, wobei eine stabile Menge eine Teilmenge der Knotenmenge ist mit der Eigenschaft, dass keine zwei Knoten dieser Teilmenge durch eine Kante verbunden sind. Bestimme dazu mit einem Greedy-Algorithmus eine Startlösung und verbessere diese mittels lokaler Suche.

Aufgabe H28 (Modellierung)

Ein Mobilfunkanbieter betreibt deutschlandweit ein Netz von n Antennen. Jede Antenne empfängt Signale einer bestimmten Frequenz. Dem Mobilfunkanbieter stehen m verschiedene Frequenzen zur Verfügung, die den Antennen zugewiesen werden müssen.

Bei der Frequenzzuweisung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

(1) Beträgt die (euklidische) Distanz zwischen zwei Antennen weniger als D_0 km, darf diesen beiden Antennen nicht dieselbe Frequenz zugewiesen werden.

(2) Bei einer Distanz zwischen D_0 und $D_1 > D_0$ km darf zwar dieselbe Frequenz zugewiesen werden, die dabei auftretenden Interferenzen verursachen jedoch Kosten von c Geldeinheiten pro Paar von interferierenden Antennen.

(3) Bei einer Distanz von mehr als D_1 km dürfen beide Antennen mit der selben Frequenz betrieben werden, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen.

a) Formulieren Sie das Problem, eine kostenminimale Frequenzzuweisung zu finden, als ganzzahliges Programm.

b) Für Antennen, welche in Grenznähe stehen, kann es Einschränkungen hinsichtlich der zuweisbaren Frequenzen geben. D. h. für jede Antenne in einem Grenzgebiet gibt es eine Teilmenge von $\{1, ..., m\}$ der für diese Antenne zulässigen Frequenzen.

Erweitern Sie Ihr Modell aus a) derart, dass dieser Sachverhalt mit berücksichtigt wird.