Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

8. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G25 (Lagrange-Funktion und Subgradientenmethode)

Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{lrcl} \min & 4 - 2x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \in & \{0,1\}. \end{array}$$

(a) Gib die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung von (P) an, wobei die Nebenbedingung $3x_1 + 4x_2 \leq 6$ relaxiert werden soll.

(b) Skizziere $L(\lambda)$, und berechne das Subdifferential von L:

$$\partial L(\lambda) := \{g \in \mathbb{R} \mid g \text{ ist ein Subgradient an der Stelle } \lambda\}$$

(c) Führe fünf Schritte der Subgradientenmethode aus, um das Maximum von L zu approximieren. Verwende als Subgradienten den in Satz 3.37 angegebenen, wähle als Schrittweite $\mu_k = \frac{1}{k+2}$ und starte mit $\lambda_0 = 0$.

(d) Ermittle die Optimallösung von (P), und vergleiche den Zielfunktionswert mit dem Optimalwert der Lagrange-Relaxierung.

Aufgabe G26 (Lagrange-Relaxierung als Schranke)

Aus der Vorlesung wissen wir, dass (im Falle der Maximierung der Zielfunktion) zwischen den Zielfunktionswerten des IP, der Lagrange-Relaxierung (LR) und des LP die folgende Beziehung gilt: $z_{IP} \leq z_{LR} \leq z_{LP}$.

Finden Sie jeweils ein Beispiel, so dass jeweils eine Ungleichung scharf ist, und eines, in dem beide Ungleichungen scharf sind.

Ordentliche Zeichnungen sind ausreichend.

Aufgabe G27 (Dantzig-Wolfe Dekomposition)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und n die Anzahl der Knoten. Betrachte das binäre Programm

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{k=1}^{n} \delta_k & & & \\ \text{s.t.} & x_{ik} + x_{jk} & \leq & \delta_k & \text{für alle } (i,j) \in E \text{ und } k \in \{1,\dots,n\} \\ & \sum_{k=1}^{n} x_{ik} & = & 1 & \text{für alle } i \in V \\ & x & \in & \{0,1\}^{n \times n} & \\ & \delta & \in & \{0,1\}^n & \end{array}$$

(a) Zeige, dass das obige binäre Programm die Färbungszahl liefert und aus einer Optimallösung eine optimale Färbung bestimmt werden kann.

Eine *zulässige Färbung* eines Graphen ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben zugeordnet werden, das heißt, dass für alle Kanten $\{i, j\} \in E$ die Bedingung $f(i) \neq f(j)$ erfüllt ist. Die *Färbungszahl* ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung gibt.

(b) Bestimme das Masterproblem der Dantzig-Wolfe-Dekomposition (siehe (3.20) im Skript), wobei $P^2 = \text{conv}\{(\begin{smallmatrix} x \\ \delta^T \end{smallmatrix}) \in \{0,1\}^{(n+1)\times n} \mid x_{ik}+x_{jk} \leq \delta_k$ für alle $\{i, j\} \in E$ und $k \in \{1, \ldots, n\}\}$ gelte.

(c) Zeige, dass eine Vereinfachung des Ergebnisses aus Aufgabenteil (b) zu dem binären Programm

$$\begin{array}{llcll} \min & \sum\limits_{s \in S_0} x_s & & & \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{s \in S_0 : i \in s} x_s & = & 1 & \text{für alle } i \in V \\ & x_s & \in & \{0,1\} & \text{für alle } s \in S_0 \end{array}$$

führt, wobei S die Menge der stabilen Mengen von G sei und $S_0 := S \setminus \{\emptyset\}$.

Hausübung

Aufgabe H24 (Lambda- und Delta-Methode) (8 Punkte)

Verallgemeinere die Lambda-Methode und die Delta-Methode um eine Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stückweise linear zu approximieren. Zerlege dazu den rechteckigen Definitionsbereich von f in Dreiecke. Gib jeweils ein Modell an.

Hinweis: Gehe davon aus, dass die für die Delta-Methode nötige Ordnung der Dreiecke gegeben ist.

Aufgabe H25 (Modellierung) (7 Punkte)

A large company wishes to move some of its departments out of London. There are benefits to be derived from doing this (cheaper housing, government incentives, easier recruitment, etc.) which have been costed. Also, however, there will be greater costs of communication between departments. These have also been costed for all possible locations of each department.

The company comprises five departments (A, B, C, D, E). The possible cities for relocation are Bristol and Brighton, or a department may be kept in London. None of these cities (including London) may be the location for more than three of the departments.

Benefits to be derived from each relocation are given below (in thousands of pounds per year):

	A	B	C	D	E
Bristol	10	15	10	20	5
Brighton	10	20	15	15	15

Communication costs are of the form $c_{ik}d_{jl}$, where c_{ik} is the quantity of communication between departments i and k per year and d_{jl} is the cost per unit of communication between cities j and l. c_{ik} and d_{jl} are given by the tables below:

	A	B	C	D	E
A		0.0	1.0	1.5	0.0
B			1.4	1.2	0.0
C				0.0	2.0
D					0.7

Quantities of communication c_{ik} (in thousands of units).

	Bristol	Brighton	London
Bristol	5	14	13
Brighton		5	9
London			10

Costs per unit of communication d_{jl} (in pounds).

Where should each department be located so as to minimize overall yearly cost?