Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
04./05.06.09

7. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Modellierung: Lambda-Methode)

Tritt in den Nebenbedingungen oder der Zielfunktion eines Optimierungsproblems eine stetige (nichtlineare) Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf, so kann diese durch einen linearen Spline approximiert werden. Dieser wiederum kann durch ein MIP modelliert werden.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein linearer Spline, das heißt eine stetige stückweise lineare Funktion, die durch die Punkte $(c_1, f_1), \dots, (c_n, f_n)$ mit $a = c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$ gegeben ist. Für $x \in [c_i, c_{i+1}]$ $(i \in \{1, \dots, n-1\})$ gilt dann $f(x) = f_i + (x - c_i)\frac{f_{i+1}-f_i}{c_{i+1}-c_i}$.

Seien $x \in [a, b]$ und $y \in \mathbb{R}$ Variablen. Um die Bedingung $y = f(x)$ durch lineare Nebenbedingungen zu modellieren kann die *convex combination* oder *lambda method* benutzt werden:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Variablen. Dann leisten die Bedingungen

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= 1 \\ y &= \sum_{i=1}^{n} f_i \lambda_i \\ 0 &\leq \lambda_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

das Gewünschte, sofern die *Special Ordered Set of Type 2 condition* oder kürzer *SOS 2 condition* gilt: Höchstens zwei der λ-Variablen sind positiv und für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\lambda_i > 0 \,\wedge\, \lambda_j > 0 \quad \Rightarrow \quad i = j \,\vee\, i = j+1 \,\vee\, i = j-1$$

Formuliere die SOS 2 condition mit Hilfe von linearen (Un)gleichungen (und zusätzlichen Variablen).

Aufgabe G23 (Lagrange-Relaxierung)

Betrachten das Problem (3.15) aus dem Skript:

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & A_1 x & \leq & b_1 \\ & A_2 x & \leq & b_2 \\ & x & \in & \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \end{array}$$

und für $\lambda \geq 0$

$$L(\lambda) = \min_{x \in P^2} c^T x - \lambda^T (b_1 - A_1 x),$$

wobei $P^2 = \{x \in \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \mid A_2 x \leq b_2\}$. Beweise folgende Aussage:
Falls x_λ Optimallösung von $L(\lambda)$ ist mit

(a) $A_1 x_\lambda \leq b_1$

(b) $(A_1 x_\lambda)_i = (b_1)_i$, falls $\lambda_i > 0$,

dann ist x_λ Optimallösung von (3.15).

Aufgabe G24 (Cover-Ungleichungen)

Wir wollen in dieser Aufgabe eine Methode zur Verschärfung von Cover-Ungleichungen entwickeln. Gegeben sei eine Knapsack-Menge

$$X = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \right\}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.

a) Sei C ein Cover für X, d. h. $\sum_{j \in C} a_j > b$. Zeigen Sie, dass die *erweiterte Cover-Ungleichung*

$$\sum_{j \in E(C)} x_j \leq |C| - 1$$

mit $E(C) = C \cup \{j : \ a_j \geq a_i \ \ \forall i \in C\}$ gültig für X ist.

Betrachten Sie die Knapsack-Menge

$$Y = \{x \in \{0,1\}^7 \mid 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}.$$

b) Geben Sie für Y drei minimale Cover sowie die zugehörigen Cover-Ungleichungen an.

c) Betrachten Sie den Cover $C = \{3, 4, 5, 6\}$ für Y und die zugehörige Cover-Ungleichung $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$. Geben Sie anhand von b) die erweiterte Cover-Ungleichung an. Lässt sich diese durch Modifikation von Koeffizienten weiter verschärfen?

d) Betrachten Sie nun die Knapsack-Menge

$$Y' = \{x \in \{0,1\}^5 \mid 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19\}.$$

Für welche Werte α_1 ist die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

gültig für Y' ?

Im allgemeinen Fall suchen wir zu einer gegebenen Cover-Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Koeffizienten α_j für $j \in \{1, ..., n\} =: N \backslash C$, so dass die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{j \in N \backslash C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1$$

gültig für X ist.

e) Skizzieren Sie ein Verfahren, welches die Koeffizienten für eine solche Ungleichung liefert.

f) Ermitteln Sie mit dem Verfahren aus e) eine verschärfte Cover-Ungleichung für den Cover $C = \{3, 4, 5, 6\}$, welche gültig für Y ist.

Hausübung

Aufgabe H21 (Eigenschaften des Stabile-Mengen-Polytops) (5 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ und $P(G)$ das zugehörige Stabile-Mengen-Polytop, d. h.

$$P(G) = \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x_i + x_j \leq 1 \; \forall (i,j) \in E\}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $P(G)$ ist volldimensional.

(b) $P(G)$ ist *submonoton*, das heißt $x \in P(G)$ impliziert $y \in P(G)$ für alle $0 \leq y \leq x$. Alle nichttrivialen Facetten von $P(G)$ haben nichtnegative Koeffizienten, das heißt, wenn $a^T x \leq \alpha$ eine facettendefinierende Ungleichung ist, gilt $a \geq 0$. Nichttriviale Facetten sind diejenigen, die *nicht* durch die Ungleichung $x_j \geq 0$ induziert werden.

(c) Die Nichtnegativitätsbedingungen $x_j \geq 0$ induzieren Facetten von $P(G)$.

Aufgabe H22 (Cliquenungleichungen) (6 Punkte)
Beweise Satz 3.29 aus dem Skript:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $(C, E(C))$ eine Clique in G.
Die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1$$

ist gültig für das Stabile-Mengen-Polytop $P(G)$. Sie definiert eine Facette von $P(G)$ genau dann, wenn $(C, E(C))$ maximal bezüglich Knoteninklusion ist.

Aufgabe H23 (Lagrange-Relaxierung) (4 Punkte)
Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rlcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b. \end{array}$$

Zeige, dass die Lagrange-Relaxierung (siehe Formel (3.17) im Skript) von dem obigen LP, bei der *alle* Nebenbedingungen relaxiert werden, gerade das aus der Einführung in die Optimierung bekannte duale LP ist.