Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
28./29.05.09

6. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Modellierung: Delta-Methode)

Tritt in den Nebenbedingungen oder der Zielfunktion eines Optimierungsproblems eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf, so kann diese durch einen linearen Spline approximiert werden. Dieser wiederum kann durch ein MIP modelliert werden.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein linearer Spline, das heißt eine stetige stückweise lineare Funktion, die durch die Punkte $(c_1, f_1), \ldots, (c_n, f_n)$ mit $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ gegeben ist. Für $x \in [c_i, c_{i+1}]$ $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$ gilt dann $f(x) = f_i + (x - c_i)\frac{f_{i+1}-f_i}{c_{i+1}-c_i}$.

Seien $x \in [a, b]$ und $y \in \mathbb{R}$ Variablen. Um die Bedingung $y = f(x)$ durch lineare Nebenbedingungen zu modellieren kann die *delta* oder *incremental method* benutzt werden:

Seien $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1} \in \mathbb{R}$ Variablen. Dann leisten die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
&x = a + \sum_{i=1}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)\delta_i \\
&y = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(f_{i+1} - f_i)\delta_i \\
&0 \leq \delta_i \leq 1 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n-1\}
\end{aligned}
$$

das Gewünschte, sofern die *filling condition* gilt:

$$\text{Für alle } i \in \{2, \ldots, n-1\} \text{ gilt } \delta_i > 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, i-1\} : \delta_j = 1.$$

Formuliere die filling condition mit Hilfe von linearen (Un)gleichungen (und zusätzlichen Variablen).

Aufgabe G20 (Graphen)

Zeigen Sie: Ein Graph $G = (V, E)$ ist bipartit genau dann, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Aufgabe G21 (Gültige Ungleichungen)

(a) Sei $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid x + y \geq b\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$x \geq f \cdot (\lceil b \rceil - y)$$

gültig für P_1 ist.

(b) Sei $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y \leq b + x\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$$

gültig für P_2 ist.

Hausübung

Aufgabe H18 (Gültige Ungleichungen)
Sei $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+^2 \mid a_1 y_1 + a_2 y_2 \leq b + x\}$ mit $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ und $b \notin \mathbb{Z}$. Sei weiterhin $f = b - \lfloor b \rfloor$ und $f_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor$ für $i = 1, 2$.
Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\lfloor a_1 \rfloor y_1 + \left(\lfloor a_2 \rfloor + \frac{f_2 - f}{1-f} \right) y_2 \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1-f}$$

gültig für P ist.

Aufgabe H19 (Modellierung)
Standardeisenstäbe der Länge b sollen so zerteilt werden, dass man k_i Stäbe der Länge $\alpha_i \leq b$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ erhält, wobei die Anzahl der verwendeten Standardstäbe möglichst klein sein soll. Formuliere dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm für den Fall,

(a) dass die Standardstäbe zerschnitten werden,

(b) dass die Standardstäbe zersägt werden, wobei bei jedem Zersägen die Länge c verloren geht.

Aufgabe H20 (Gomory-Schnitte)
Löse folgende Optimierungsprobleme mit Hilfe von Gomory-Schnitten:

$$\text{(IP)} \quad \begin{array}{lrcl} \max & 4x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}, \end{array} \qquad \text{(MIP)} \quad \begin{array}{lrcl} \max & 4x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & \in & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Zur Lösung der LP-Relaxierungen kann eine Implementierung des Simplex-Algorithmus' genutzt werden.