Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
20./22.05.09

5. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Schnittebenen)
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

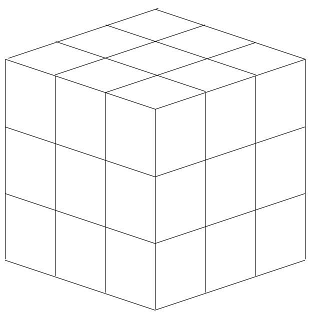
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere das Polyeder P.

(b) Bestimme $P^1, \dots, P^t$ (siehe Gleichung (3.3) und (3.4) im Skript), sodass $P^t = P_I$ gilt, und zeichne die Polyeder $P^1, \dots, P^t$ in die Skizze ein.

Aufgabe G17 (Ganzzahliges Farkas Lemma)
Beweise Lemma 3.2 aus dem Skript:
Sei P ein Polyeder. Dann enthält jede minimale Seitenfläche von P genau dann ganzzahlige Punkte, wenn jede Stützhyperebene ganzzahlige Punkte enthält.
Hinweis: Benutze das ganzzahlige Analogon des Farkas-Lemmas (Satz 2.27).

Aufgabe G18 (Modellierung)
27 kleine Würfel sollen zu einem großen $3 \times 3 \times 3$-Würfel (siehe Abbildung) zusammengesetzt werden. In dem großen Würfel nennen wir drei kleine Würfel eine *Linie*, falls sie parallel zu einer Kante des großen Würfels aufgereiht liegen, eine Diagonale parallel zu einer der Seitenflächen des großen Würfels bilden, oder eine Raumdiagonale in dem großen Würfel bilden.
(*Tipp:* Es gibt hier insgesamt 49 Linien.)



Wir suchen nun eine Anordnung von 13 kleinen weißen und 14 kleinen schwarzen Würfeln mit möglichst wenigen Linien, welche aus gleichfarbigen Würfeln bestehen.
Formulieren Sie ein ganzzahliges Programm zur Lösung dieses Problems.

Hausübung

Aufgabe H15 (Schnittebenen) (6 Punkte)

Gegeben sei die Familie von ganzzahligen Ungleichungssystemen mit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 &\leq k \\ -kx_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

die die Polyeder P_k definieren.

(a) Zeige, dass P_k^1 (siehe Gleichung (3.3) im Skript) durch das folgende System beschrieben wird:

$$\begin{aligned} (k-1)x_1 + x_2 &\leq k-1 \\ -(k-1)x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) Benutze die Ergebnisse aus Teil (a), um zu zeigen, dass in diesem Beispiel die Zahl t mit $t = \min\{s \in \mathbb{N} \mid P_k^s = (P_k)_I\}$ (siehe Satz 3.9 im Skript) exponentiell in der Kodierungslänge des Ungleichungssystems ist, das P_k beschreibt.

Aufgabe H16 (Ecken) (4 Punkte)

Gegeben sei ein 0/1-Programm (P):

$$\begin{array}{lccl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \in & \{0,1\}^n. \end{array}$$

Zeige, dass jede 0/1-Lösung der LP-Relaxierung von (P) eine Ecke von $P(A,b) \cap [0,1]^n$ ist, das heißt jedes $x \in P(A,b) \cap \{0,1\}^n$ ist eine Ecke von $P(A,b) \cap [0,1]^n$.

Aufgabe H17 (Modellierung) (5 Punkte)

Ein Glaser schneidet aus Glasplatten der Größe 3m × 7m im Auftrag seiner Kunden n kleinere Platten der Größe $a_i \times b_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ aus, wobei $a_i \leq 3$ und $b_i \leq 7$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelte. Ziel ist es, die Aufträge so auf den einzelnen Glasplatten anzuordnen, dass die Anzahl angeschnittener Platten minimal ist. Beachte, dass die Aufträge sowohl horizontal als auch vertikal platziert werden können.

Formuliere dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm und löse es mittels `zimpl` und `scip` für die in Tabelle 1 angegebenen Daten. Skizziere eine Optimallösung.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	1.3	2.3	1.5	1.1	0.5	0.3	0.9	1.3	2.1	0.7
b_i	2.3	1.3	3.5	2.1	1.5	3.3	2.9	0.3	1.1	3.7

Tabelle 1: Aufträge