



4. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Projektion und Fourier Motzkin Elimination)

Wir betrachten mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a, b \in \mathbb{R}^m$ das folgende Polyeder:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid Ax + ay \leq b\}$$

sowie die orthogonale Projektion P_H von P auf

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid y = 0\}.$$

Ferner sei

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid u^T Ax \leq u^T b \quad \forall u \in C, y = 0\}$$

mit

$$C = \{u \in \mathbb{R}_+^m \mid u^T a = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $P_H = Q$.

Aufgabe G11 (Totale Duale Integralität)

Gegeben seien die Ungleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Begründe, warum diese beiden Systeme dasselbe Polyeder definieren.

Sind die Systeme jeweils TDI?

Aufgabe G12 (Graphen und ungerade Kreise)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und C ein ungerader Kreis in G . Betrachte das lineare Programm

$$\max\{c^T x \mid 0 \leq x, x_i + x_j \leq 1 \quad \forall \{i, j\} \in E\}$$

mit $c = \chi^{V(C)}$.

Zeigen Sie:

- $x_i^* = \frac{1}{2}$ für alle Knoten $i \in V(C)$, $x_i^* = 0$ für $i \notin V(C)$ löst das lineare Programm.
- x^* ist keine Konvexkombination von Inzidenzvektoren von stabilen Mengen in G .

Hausübung

Aufgabe H9 (Ganzzahlige Polyeder)

(5 Punkte)

Sei A eine ganzzahlige $m \times n$ -Matrix und b ein ganzzahliger Vektor.

Zeigen Sie:

Das Polyeder $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist ganzzahlig genau dann, wenn das Polyeder $\tilde{P} = \{(x, z)^T \mid [A \ I](x, z)^T = b, x, z \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Aufgabe H10 (TDI-Beschreibung von Polyedern)

(5 Punkte)

Gegeben sei das Polyeder

$$P = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Ist das System eine minimale Beschreibung von P ?

Tipp: Verfahre wie im Beweis von Satz 2.37.

Aufgabe H11 (Modellieren und ZIMPL)

(5 Punkte)

Löse das Optimierungsproblem aus Aufgabe H2 mit Hilfe von `zimpl` und `scip`. Gib sowohl eine Formulierung in `zimpl` als auch eine Optimallösung an.

In der Modellierungssprache `zimpl` können Optimierungsprobleme einfach formuliert werden. Aus dieser Formulierung kann dann automatisch eine Datei erzeugt werden, die als Eingabedatei für die meisten MIP-Löser verwendet werden kann. Eine Dokumentation zu `zimpl` gibt es unter

<http://zimpl.zib.de/download/zimpl.pdf>

Mit dem Programm `scip` können gemischt ganzzahlige Programme gelöst werden. Am Fachbereich kann es einfach unter `scip` aufgerufen werden. Mit `h` oder `help` erhält man eine Liste von Befehlen die in `scip` verwendet werden können. Die von `zimpl` erzeugte Datei kann mit dem Befehl `read Dateiname` eingelesen werden. Das eingelesene Optimierungsproblem kann dann mit dem Befehl `optimize` gelöst werden.