Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
30.04./04.05.09

2. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)"

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Darstellungen von Polyedern)
Gegeben sei das Polyeder P durch die innere Beschreibung:

$$P = \text{conv}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Ermitteln Sie *zeichnerisch* eine äußere Beschreibung von P.

(b) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man mittels Fourier-Motzkin-Elimination *rechnerisch* die äußere Beschreibung von P erhält.

Aufgabe G5 (Modellierung)
Modellieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils als zulässigen Bereich eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms:

a) $M_1 = \{(1,1), (2,3), (3,1), (4,2)\}$

b) $M_2 = ([0,1] \times \{1\}) \cup ([1,2] \times \{3\}) \cup ([2,3] \times \{2\}) \cup ([3,4] \times \{3\})$

c) $M_3 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x_1 \leq 3,\ |x_1| \leq x_2 \leq |x_1| + 1\big\}$

Aufgabe G6 (Spezialfall des Satzes von Minkowski)
Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder. Dann gilt

$$P(A, 0) = \text{cone}(E).$$

Hausübung

Aufgabe H3 (Unbeschränktheit von LPs) (5 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz:
Seien $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder und $c \in \mathbb{K}^n$. Das lineare Programm $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ ist genau dann unbeschränkt, wenn es eine Extremale ϵ von P gibt mit $c^T \epsilon > 0$.

Aufgabe H4 (Darstellungen von Polyedern) (5 Punkte)

Das Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ sei durch folgendes Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & \geq & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Geben Sie eine Darstellung von P in der Form $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ an.
Sie müssen nicht alle Teilrechnungen angeben und dürfen hier gerne zur Berechnung von Teilergebnissen auf mathematische Software zurückgreifen.

Aufgabe H5 (Das Knapsack-Polytop) (5 Punkte)

Gegeben sei die Knapsack-Ungleichung $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$.
Wir betrachten die beiden Polytope

$$P := \mathrm{conv}\left\{ x \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \right\} \quad \text{und}$$
$$S := \mathrm{conv}\left\{ x \in \{0,1\}^n \mid x \text{ ist eine Lösung des gegebenen Rucksackproblems} \right\}.$$

(a) Zeige: $S \subset P$.

(b) Gilt auch $P \subset S$?