Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
09./10.07.09

12. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)"

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Primal-Dual Algorithmus für das Knotenüberdeckungsproblem)

Es soll der Primal-Dual Algorithmus (Algorithmus 6.13 im Skript) für das Knotenüberdeckungsproblem betrachtet werden.

Zur Erinnerung: Das *Knotenüberdeckungsproblem* zu einem Graphen $G = (V, E)$ besteht in dem Finden einer kardinalitätsminimalen Teilmenge $S \subset V$, sodass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten in S inzident ist.

(a) Spezialisiere den Algorithmus 6.13 für das Knotenüberdeckungsproblem.

(b) Bestimme mit Hilfe des Algorithmus 6.13 eine Lösung für das Knotenüberdeckungsproblem zu dem in der Abbildung 1 dargestellten Graphen. Lässt sich die Lösung durch Rückwärtslöschung noch verbessern?

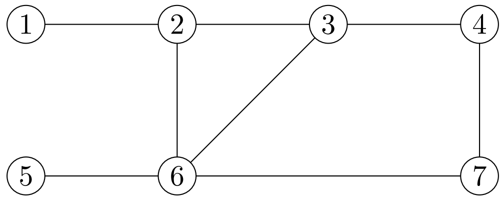

Abbildung 1: Eine Knotenüberdeckungsinstanz

(c) Zeige, dass die Aussage des Satzes 6.14 nicht verbessert werden kann, das heißt, dass für alle $k < 2$ der Algorithmus 6.13 kein k-Approximationsalgorithmus ist.

Aufgabe G38 (Eine Formulierung des Steinerbaum-Problems)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c_e \in \mathbb{R}_+$ für alle $e \in E$.

Wir betrachten Netzwerkentwurfsprobleme der Form

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{e \in E} c_e x_e & & & \\ \text{s.t.} & \sum_{e \in \delta(S)} x_e & \geq & f(S) & \forall S \subset V, \\ & x_e & \in & \{0,1\} & \forall e \in E \end{array} \tag{1}$$

(siehe (6.12) im Skript), wobei $f : 2^V \to \{0,1\}$ eine *echte* Funktion ist.

(a) Betrachte das Steinerbaum-Problem (Beispiel 6.22 im Skript):

Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph (V, E) und eine Teilmenge der Knoten $T \subset V$, die *Terminalmenge*. Finde eine bezüglich c gewichtsminimale Kantenmenge $A \subset E$, welche T aufspannt, das heißt eine Kantenmenge A, sodass alle Paare $s, t \in T$ durch einen Weg in (V, A) verbunden sind.

Zeige, dass die Funktion $f : 2^V \to \{0,1\}$ mit

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S \cap T \neq \emptyset \text{ und } (V \setminus S) \cap T \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

echt und mit dieser (1) eine korrekte Modellierung des Steinerbaum-Problems ist.

(b) Bestimme mit Hilfe von Algorithmus 6.20 eine Lösung für das Steinerbaum-Problem zu dem in Abbildung 2 dargestellten Graphen mit der Terminalmenge $T = \{2, 3, 7\}$.

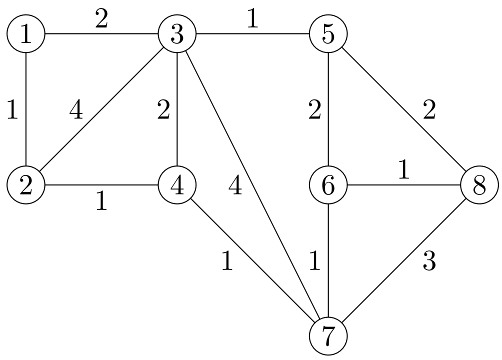

Abbildung 2: Eine Steinerbaum-Instanz

Hausübung

Aufgabe H34 (Primal-Dual Algorithmus für kürzeste Wege) (6 Punkte)
Betrachte die in Abbildung 3 dargestellte Kürzeste-Wege-Instanz, wobei $s = 1$ und $t = 9$ gelte.

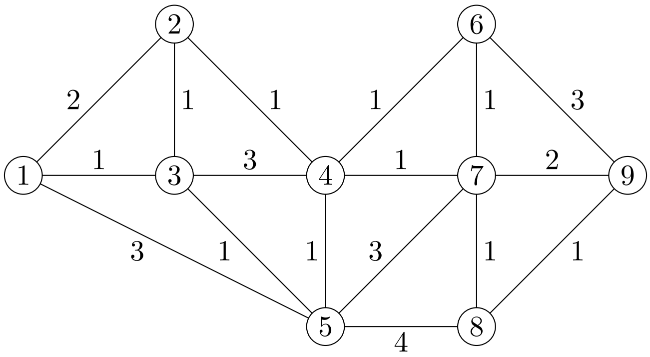

Abbildung 3: Eine Kürzeste-Wege-Instanz

(a) Spezialisiere Algorithmus 6.15 für das Kürzeste-Wege-Problem.

(b) Löse die gegebene Instanz mit Hilfe des Alogrithmus. Verwende dabei die Minimale Verletztheitsregel (siehe Seite 106 im Skript).

Aufgabe H35 (Eine Formulierung des T-Join-Problems) (9 Punkte)
Betrachte das T-Join-Problem (Beispiel 6.23 im Skript):
Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph (V, E) und eine Teilmenge der Knoten $T \subset V$ mit $|T|$ gerade. Finde eine bezüglich c gewichtsminimale Kantenmenge $A \subset E$, so dass jeder Knoten in T ungeraden Grad und jeder Knoten nicht in T geraden Grad hat.
Zeige, dass die Funktion $f : 2^V \to \{0, 1\}$ mit

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |S \cap T| \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } |S \cap T| \text{ gerade} \end{cases}$$

echt und mit dieser (1) eine korrekte Modellierung des T-Join-Problems ist.