Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

SS 2009
02./03.07.09

11. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)“

Gruppenübung

Aufgabe G35 (FPAS für das Rucksackproblem)
Betrachte die folgende 0/1-Rucksackinstanz:

$$\begin{array}{rlcl} \max & \begin{pmatrix} 48 & 43 & 3 & 3 & 19 \end{pmatrix} x & & \\ \text{s. t.} & \begin{pmatrix} 23 & 21 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 10 \end{pmatrix} x & \leq & 24 \\ & x & \in & \{0,1\}^5 \end{array}$$

Berechne mit Hilfe des FPAS für das 0/1-Rucksackproblem (Algorithmus 6.9 im Skript) eine Näherungslösung x mit der Eigenschaft, dass

$$c^T x \geq \frac{3}{4} c^T x^*$$

gilt, wobei x^* eine Optimallösung sei.

Aufgabe G36 (Ein $\frac{1}{2}$-Approximationsalgorithmus für das Rucksackproblem)
Betrachte das 0/1-Knapsack-Problem:

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & a^T x & \leq & b \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array}$$

mit $a, b, c > 0$, sowie o.B.d.A. $\frac{c_1}{a_1} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$, $\sum_{i=1}^n a_i > b$ und $a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Bestimme eine Optimallösung der LP-Relaxierung und beweise deren Optimalität.
Hinweis: Rate eine Optimallösung (wende einen kontinuierlichen Gewichtsdichtengreedy an) und konstruiere daraus mit Hilfe des dualen Problems eine duale Lösung mit dem gleichen Zielfunktionswert.

(b) Es soll gezeigt werden, dass eine leicht erweiterte Form des Gewichtdichtengreedys ein $\frac{1}{2}$-Approximations-algorithmus für das 0/1-Knapsack-Problem ist:
Sei

$$k = \min \left\{ j \in \{1, \ldots, n\} \mid \sum_{i=1}^{j} a_i > b \right\}$$

und $x^1, x^2 \in \{0,1\}^n$ mit

$$x_i^1 = \begin{cases} 1 & \text{für } i \in \{1,\ldots,k-1\} \\ 0 & \text{für } i \in \{k,\ldots,n\} \end{cases}$$
$$x_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Wähle $x^H \in \{x^1, x^2\}$ so, dass

$$c^T x^H = \max\{c^T x^1, c^T x^2\}$$

gilt.
Zeige, dass

$$\frac{1}{2}c^* \leq c^T x^H \leq c^*$$

gilt, wobei c^* der Optimalwert des obigen Rucksackproblems sei.
Tipp: Betrachte die Optimallösung der LP-Relaxierung aus Aufgabenteil (a).

Hausübung

Aufgabe H32 (Approximationsalgorithmen) (6 Punkte)

Betrachte das Rucksackproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s. t.} & a^T x & \leq & b \\ & x & \in & \mathbb{Z}_+^n \end{array}$$

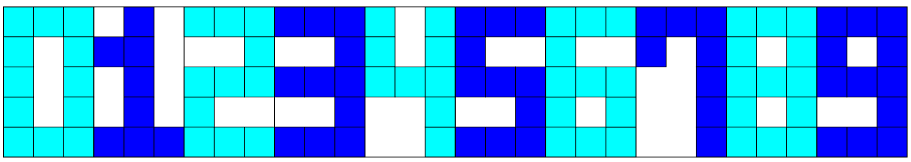
mit $a, b, c > 0$ sowie o.B.d.A. $\frac{c_1}{a_1} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$, $\sum_{i=1}^n a_i > b$ und $a_i \leq b$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(a) Formuliere den Gewichtsdichtengreedy für das obige Rucksackproblem.

(b) Zeige, dass der Gewichtsdichtengreedy ein $\frac{1}{2}$-Approximationsalgorithmus ist.

Aufgabe H33 (Modellierung) (5 Punkte)

Wir betrachten die digitale Darstellung der Ziffern 0-9 auf einem 5×3-Raster, wie sie in der Abbildung gezeigt wird.



In der abgebildeten Startkonfiguration berührt die Null mit zwei ihrer Quadrate die Eins. Die Eins berührt mit drei ihrer Quadrate die Quadrate ihrer Nachbarn (mit zweien die Null und mit einem die Zwei), und so weiter. Die Neun berührt schließlich mit vier Quadraten ihren Nachbarn (die Acht).

Multipliziert man nun in einer vorliegenden Konfiguration jede Zahl mit der Anzahl der berührenden Quadrate und summiert alles auf, so erhält man für diese Konfiguration den „Score". In unserem Falle ist dies

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 277.$$

Finden Sie ein IP-Modell, dessen Optimallösung eine Umsortierung der Ziffern mit maximalem bzw. minimalem Score liefert.

Aufgabe H34 (Approximationsalgorithmen) (4 Punkte)

Zur Ermittlung einer Knotenüberdeckung in einem Graphen $G = (V, E)$ betrachte den folgenden Greedy-algorithmus:

Input: $G = (V, E)$
Output: Ein Vertex Cover $R \subset V$
$R = \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
  Wähle einen Knoten $v \in V \setminus R$ mit maximalem Grad.
  $R = R \cup \{v\}$
  $E = E \setminus \{e \in E \mid v \in e\}$

Zeige, dass der obige Algorithmus für keine Zahl $k \in \mathbb{N}$ ein k-Approximationsalgorithmus für das Auffinden einer minimalen Knotenüberdeckung ist.
Tipp: Betrachte Graphen der in Abbildung 1 dargestellten Form.

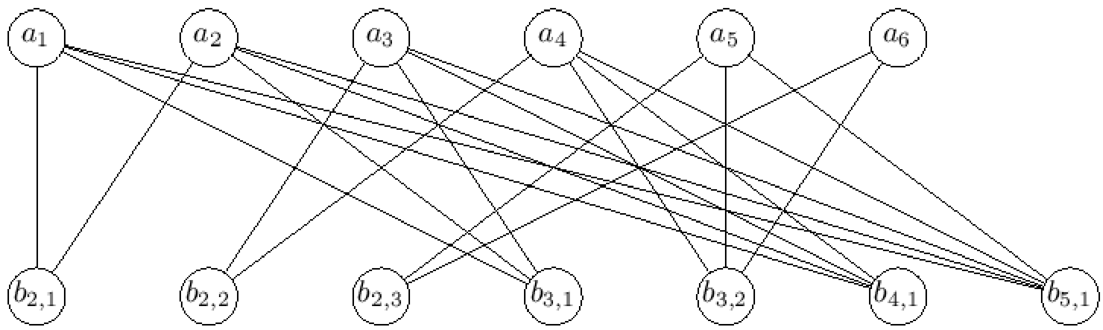


Abbildung 1: Ein spezieller Graph

Hinweis: Definiere dazu

$$V_n = \{a_1, \ldots, a_n, b_{2,1}, \ldots, b_{2,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, b_{3,1}, \ldots, b_{3,\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, \ldots, b_{n-1,1}, \ldots, b_{n-1,\lfloor \frac{n}{n-1} \rfloor}\}$$
$$E_n = \Big\{\{a_i, b_{j,k}\} \mid j \in \{2, \ldots, n-1\}, k \in \{1, \ldots, \lfloor \tfrac{n}{j} \rfloor\}, i \in \{(k-1)j + 1, \ldots, kj.\}\Big\}$$