Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Alexander Martin
Dipl.-Math. Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
25./26.06.09

10. Übungsblatt zur „Optimierung II (Diskrete Optimierung)"

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Branch & Bound)

Das binäre Programm

$$\begin{array}{rrcll} \min & \sum_{k=1}^{n} \delta_k & & & \\ \text{s.t.} & x_{ik} + x_{jk} & \leq & \delta_k & \text{für alle } \{i,j\} \in E \text{ und } k \in \{1,\ldots,n\} \\ & \sum_{k=1}^{n} x_{ik} & = & 1 & \text{für alle } i \in V \\ & x & \in & \{0,1\}^{n\times n} & \\ & \delta & \in & \{0,1\}^n & \end{array}$$

liefert die Färbungszahl des Graphen $G = (V, E)$. Eine *zulässige Färbung* eines Graphen ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben zugeordnet werden, das heißt, dass für alle Kanten $\{i, j\} \in E$ die Bedingung $f(i) \neq f(j)$ erfüllt ist. Die *Färbungszahl* ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung gibt.
Warum ist diese Formulierung ungünstig um mit dem Branch & Bound-Verfahren gelöst zu werden?
Tipp: Welche Auswirkungen hat die Symmetrie des Problems auf den Branch & Bound-Baum?

Aufgabe G32 (Dynamische Programmierung)

Löse das folgende Optimierungsproblem mittels Dynamischer Programmierung:

$$\begin{array}{rrcl} \max & 10y_1 + 7y_2 + 25y_3 + 24y_4 & & \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 + 6y_3 + 5y_4 & \leq & 7 \\ & y & \in & \{0,1\}^4. \end{array}$$

Aufgabe G33 (Dynamische Programmierung)

Betrachte das ganzzahlige Rucksackproblem

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & a^T x & \leq & b \\ & x & \in & \mathbb{Z}_+^n \end{array}$$

mit $a_j \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in \mathbb{Z}_+$ für $j = 1, \ldots, n$.
Bestimme ein zugehöriges Dynamisches Programm und die im entsprechenden DP-Algorithmus zu benutzende rekursiv definierte Funktion J.

Aufgabe G34 (Modellierung)

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $l, u \in \mathbb{R}^n$. Formuliere das folgende Problem als gemischt-ganzzahliges Programm:
Maximiere $c^{\mathrm{T}} x$ unter der Bedingung, dass mindestens k der Ungleichungen $A_i x \leq b_i$ $(1 \leq i \leq m)$ erfüllt sind, wobei $l \leq x \leq u$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H29 (Dynamische Programmierung) (5 Punkte)

Bestimme die Länge eines kürzesten Weges vom Knoten 1 zum Knoten 9 in dem in Abbildung 1 dargestellten Graphen mit Hilfe Dynamischer Programmierung. *Tipp:* Anstatt sich die gesamten Wege P_i während des

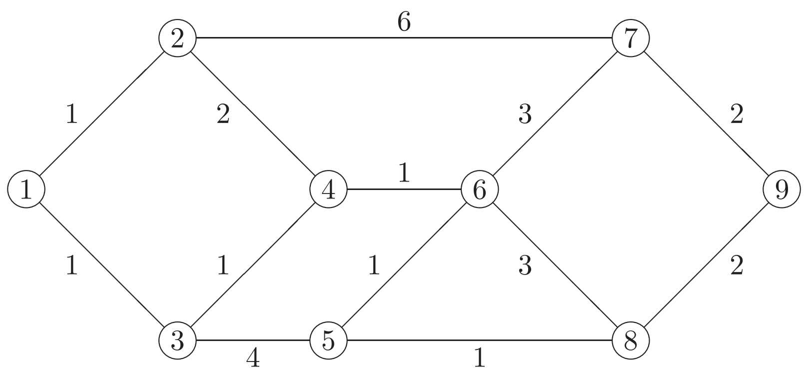

Abbildung 1: Eine kürzeste-Wege-Instanz

Algorithmus zu merken, genügt es sich nur den Vorgängerknoten von i auf dem kürzesten Weg von s nach i zu merken.

Aufgabe H30 (Branch & Bound) (5 Punkte)

Löse folgendes Optimierungsproblem mittels Branch & Bound und skizziere den Branch & Bound-Baum. Zur Lösung der jeweils auftretenden LP-Relaxierungen darf ein LP-Solver benutzt werden.

$$
\begin{array}{rrcl}
\max & 4x_1 - x_2 & & \\
\text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\
 & x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1,\, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1,\, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Aufgabe H31 (Reduktionen) (5 Punkte)

(a) Betrachte das Entscheidungsproblem Stable Set:

Gegeben sei ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Enthält G eine stabile Menge, welche aus k Knoten besteht?

Zeige, dass Stable Set $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Gib eine polynomielle Transformation des Problems Sat (Definition 2.9 aus dem Skript) auf Stable Set an.

Zur Erinnerung: Eine *stabile Menge* in einem Graphen G ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Knoten.

(b) Betrachte das Entscheidungsproblem Vertex Cover:

Gegeben sei ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Enthält G eine Knotenüberdeckung (vertex cover) der Kardinalität k?

Zeige, dass Vertex Cover $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Zur Erinnerung: Eine *Knotenüberdeckung* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $S \subset V$, so dass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten in S inzident ist.