Lineare Algebra

für Physiker

–

Zusammenfassung

Matthias Schnaubelt
matthias.schnaubelt@gmail.com

Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppe, Ringe, Körper

Definition 1.1. *Eine binäre Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung*

$$* : M \times M \mapsto M : (m, m') \mapsto m * m'.$$

Definition 1.2. *Zu einer Menge M bezeichnet $p(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M.*

Definition 1.3. *Seien A, B beliebige Mengen. Dann bezeichnet $A^B = \{f \mid f : B \mapsto A\}$ die Menge aller Abbildungen von B nach A.*

Definition 1.4. *Eine Verknüpfung $* : M \times M \mapsto M$ heißt*

- *kommutativ, falls für alle $m, m' \in M$ gilt:*

$$m * m' = m' * m.$$

- *assoziativ, falls für alle $m, m', m'' \in M$ gilt:*

$$(m * m') * m'' = m * (m' * m'').$$

  In diesem Fall ist es nicht notwendig, Klammern zu setzen, und das Paar $(M, *)$ heißt Halbgruppe.

Ist eine Halbgruppe zusätzlich kommutativ, heißt sie abelsch.

Definition 1.5. *Eine Halbgruppe $(G, *)$ heißt Gruppe, falls gilt:*

- $\exists\, e \in G\ \forall\, g \in G\ : e * g = g$ *(Neutralelement bezüglich $*$)*
- $\exists\, g^{-1} \in G\ \forall\, g \in G\ : g^{-1} * g = e$ *(Inverses bezüglich $*$)*

Definition 1.6 (Ring). *Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \mapsto R$ und $\cdot : R \times R \mapsto R$. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt Ring, falls gilt:*

- $(R, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.*
- $(R, \cdot)$ *ist eine Halbgruppe.*
- *Es ist $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ sowie $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$. (Distributivgesetze)*

Definition 1.7 (Körper). *Ein Ring $(K, +, \cdot)$ mit additivem Neutralelement $0 \in K$ heißt Körper, falls $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist. Das additive Neutralelement 0 heißt Nullelement und das multiplikative Neutralelement heißt Einselement.*

2 Vektorräume

Definition 2.1 (**Vektorraum**). *Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer binären Verknüpfung (Addition) $+ : V \times V \mapsto V$ sowie einer Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \mapsto V$, sodass gilt:*

- *$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.*
- *$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ gilt:*
  1. $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{v} = (\lambda \cdot \boldsymbol{v}) + (\mu \cdot \boldsymbol{v})$
  2. $\lambda \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\lambda \cdot \boldsymbol{v}) + (\lambda \cdot \boldsymbol{w})$
  3. $\lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{v}) = (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{v}$
  4. $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Definition 2.2. *Es sei $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ ein geordnetes k-Tupel von Vektoren aus einem K-Vektorraum V.*

Ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ heißt

- *Linearkombination von $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ existieren, sodass gilt*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

- *Affinkombination von $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ existieren, sodass gilt*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k \text{ und } \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

Definition 2.3. *Speziell für $K = \mathbb{R}$ heißt eine Affinkombination $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ eine Konvexkombination, falls zusätzlich gilt*

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \;\forall\; 1 \leq i \leq k.$$

Definition 2.4. *Das k-Tupel $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ heißt linear unabhängig, falls gilt:*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in K^k : \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Andernfalls heißt $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ linear abhängig.

Lemma 2.1. *Sei $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ linear unabhängig.*

- *Für jede Permutation $\pi \in Sym(\{1, \ldots, k\})$ ist auch $(\boldsymbol{v}_{\pi(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\pi(k)})$ linear unabhängig.*
- *Jede Teilfamilie $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ für $i \leq k$ ist linear unabhängig.*

Definition 2.5. *Eine unendliche Familie von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear abhängig ist.*

Proposition 2.1. *Für $n \geq 2$ sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ genau dann linear abhängig, falls einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.*

Definition 2.6. *Sei V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Teilraum (oder Unterraum) von V, falls $\forall \lambda, \mu \in K \;\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ gilt*

$$\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in U.$$

Notation: $U \leq V$

Proposition 2.2. *Seien U, W Teilräume des K-Vektorraumes V. Dann sind $U \cap V$ und $U + W := \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$ Unterräume von V.*

Definition 2.7. *Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Die Menge $lin(M) = span(M) := \{\lambda_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{m}_n \mid \lambda_i \in K, \boldsymbol{m}_i \in M\}$ heißt lineare Hülle (oder linearer Aufspann) von M in V. Falls $M = \emptyset$ setzen wir $lin(M) = \{\boldsymbol{0}\}$. M heißt Erzeugendensystem von $lin(M)$.*

Beweis [2, 16]

Proposition 2.3. *$lin(M)$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.*

Definition 2.8. *Eine Menge $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $lin(M) = V$. Eine Familie in V heißt Basis, falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bildet.*

Definition 2.9. *Ein Vektorraum heißt endlich erzeugt, falls er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.*

Satz 2.1. *Sei $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *$(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V.*
- *$(v_i)_{i \in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V, daher $\forall J \subset I$ ist $(v_j)_{j \in J}$ kein Erzeugendensystem von V.*
- *$(v_i)_{i \in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabhängige Familie, daher $\forall J' \supset I$ ist $(v_j)_{j \in J'}$ kein Erzeugendensystem von V.*
- *$(v_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V, aus dem sich jeder Vektor aus V eindeutig linear kombinieren lässt.*

Folgerung 2.1 (Basisauswahlsatz). *Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ ein (endliches) Erzeugendensystem von V. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, sodass $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V ist.*

Bemerkung 2.1. *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, insbesondere endlich erzeugte.*

Lemma 2.2 (Austauschlemma). *Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V und $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in V$. Ist $k \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, dann ist $(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r)$*

Satz 2.2 (Austauschsatz). *Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt $n \leq r$ und es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_{r-n} \in \{1, \ldots, r\}$, sodass*

$$(w_1, \ldots, w_n, v_i, \ldots, v_{i_{r-n}})$$

wieder eine Basis ist.

Folgerung 2.2. *Jede Basis von V ist endlich.*

Folgerung 2.3. *Jede linear unabhängige Familie in V lässt sich zu einer Basis fortsetzen.*

Definition 2.10. *Ist V ein K-Vektorraum, so bezeichnet*

$$\dim_K V := \begin{cases} r, & \textit{falls } V \textit{ eine Basis der Länge } r \textit{ besitzt.} \\ \infty, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

die Dimension von V über K.

Beweis [2, 27]

Proposition 2.4. *Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $U < V$ ein echter Teilraum. Dass gilt $\dim_K U < \dim_K V$.*

3 Lineare Abbildungen

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K.

Definition 3.1. *Eine Abbildung $f : V \mapsto W$ heißt linear, falls gilt*

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \quad \forall\ u, v \in V, \lambda, \mu \in K.$$

Definition 3.2. *Sei $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung.*

- *Die Menge*
$$\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$
heißt Bild von f.
- *Die Menge*
$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$$
heißt Kern von f.

Beispiel [2, 28]

Proposition 3.1. *Eine lineare Abbildung $f : V \mapsto W$ ist injektiv genau dann wenn* $\operatorname{Ker} f = 0$ *ist. Außerdem gilt $\forall\ u, v \in V$:*

$$f(u) = f(v) \;\Leftrightarrow\; u - v \in \operatorname{Ker} f$$

Beweis [2, 29]

Satz 3.1 (Dimensionsformel). *Sei $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

Beweis [2, 29]

Satz 3.2. *Sei $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung und* $\dim V < \infty$. *Äquivalent sind:*

- *f ist injektiv.*
- *f ist surjektiv.*
- *f ist bijektiv.*

Bemerkung 3.1. *Für unendlich-dimensionale Vektorräume existieren stets injektive lineare Abbildungen, die nicht surjektiv sind und surjektive Abbildungen, die nicht injektiv sind.*

Definition 3.3. *Sei $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung.*

$$rank_K\ f = \dim_K f(V) = \dim_K \operatorname{Im} f$$

heißt Rang von f über K.

Proposition 3.2. *Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $F : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung. Es gilt:*

- $lin(f(v), \dots, f(v_n)) = \operatorname{Im} f$
- $\operatorname{rank} f$ *ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren von* $(f(v_1), \dots, f(v_n))$
- f *surjektiv* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim W$
- f *injektiv* $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ *linear unabhängig*

- *f bijektiv $\Leftrightarrow$ $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W*

Beweis [2, 32]

Satz 3.3 (Hauptsatz über lineare Abbildungen). *Seien V, W K-Vektorräume, $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \mapsto W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i \ \forall \ i$.*

Definition 3.4. .

- *Eine bijektive K-lineare Abbildung heißt K-Vektorraum-Isomorphismus.*
- *Zwei K-Vektorräume heißen isomorph, falls ein K-Vektorraum-Isomorphismus von V nach W existiert.*

Bemerkung 3.2. *Wenn $f : V \mapsto W$ ein Isomorphismus ist, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \mapsto V$ definiert und ebenfalls bijektiv.*

Folgerung 3.1. *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum von endlicher Dimension. Dann ist V isomorph zu K^n.*

3.1 Matrizen

Definition 3.5. *Sei X eine Menge und $m, n \in \mathbb{N}\backslash 0$. Eine $m \times n$ Matrix M mit Koeffizienten in X ist eine Abbildung*

$$M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \mapsto X.$$

Üblicherweise schreibt man eine Matrix

$$M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \mapsto X.$$

als rechteckiges Schema

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & M_{i,j} & \vdots \\ M_{m,1} & \dots & M_{m,n} \end{pmatrix}$$

Satz 3.4. *Seien V, W Vektorräume über K und $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung. Seien $B = (v_1, \dots, v_m)$ und $C = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V beziehungsweise W. Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ existieren eindeutig bestimmte $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in} \in K$ mit*

$$f(v_i) = \mu_{i_1} w_1 + \dots + \mu_{i_n} w_n$$

Definition 3.6. *Die Matrix*

$$M_{B,C}(f) : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \mapsto K$$

$$(i, j) \mapsto \mu_{i,j}$$

heißt Matrix von f bezüglich B und C.

3.2 Strukturen linearer Abbildungen

Definition 3.7. *Seien V und W K-Vektorräume. Die Menge*

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \{\phi : V \mapsto W \mid \phi \textit{ linear } \}$$

enthält alle Homomorphismen von V nach W.

Proposition 3.3. *Der Vektorraum* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *ist Untervektorraum des K-Vektorraumes aller Abbildungen von V nach W.*

Beweis [2, 36]

Proposition 3.4. *Seien U, V, W K-Vektorräume.*

- *Sind $\phi : U \mapsto V$ und $\psi : V \mapsto W$ linear, so auch $\psi \circ \phi : U \mapsto W$.*
- $\mathrm{id} : V \mapsto V$ *ist linear.*
- *Ist $\phi : U \mapsto V$ bijektiv und linear, so ist auch ϕ^{-1} linear.*

Proposition 3.5. *Seien $\phi_1, \phi_2 : U \mapsto V$ und $\psi_1, \psi_2 : V \mapsto W$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

- $\psi \circ (\phi_1 + \phi_2) = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_1 \circ \phi_2$
- $(\psi_1 + \psi_2) \circ \phi_1 = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_1$
- $(\lambda\psi_1) \circ \phi_1 = \lambda(\psi_1 \circ \phi_1) = \psi_1 \circ (\lambda\phi_1)$

Satz 3.5. $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ *ist mit den Verknüpfungen* $(+, \circ)$ *und 1 ein Ring.*

Satz 3.6 (General linear group). $\mathrm{GL}(V) = \{\phi : V \mapsto V \mid \phi \textit{ linear und bijektiv}\}$ *ist mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe.*

3.3 Strukturen von Matrizen

Notation 3.1. *Sei $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \mapsto K; (i,j) \mapsto a_{ij}$ gegeben. Schreibe $A = (A_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$.*

Definition 3.8 (Komponentenweise Verknüpfungen). *Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$. Dann ist die Addition*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

definiert.

Definition 3.9 (Matrixmultiplikation). *Das Produkt zweier Matrizen $C = A \cdot B$ ist definiert durch*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Faustregel: "Zeile mal Spalte"

Proposition 3.6. *Seien $A, A_1, A_2 \in M_{m\times n}(K)$ sowie $B, B_1, B_2 \in M_{n\times k}(K)$. Dann gilt*

- $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$

- $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$
- $(\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B)$

Satz 3.7. *$M_n(K) := M_{n\times n}(K)$ ist mit den Verknüpfungen $(+, \circ)$ ein Ring mit 1 und eine K-Algebra.*

Definition 3.10. *Eine Matrix A heißt invertierbar, falls eine Matrix A^{-1} existiert, sodass*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Satz 3.8 (General linear group). *$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe.*

Definition 3.11. *Sei K ein Körper, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ eine Matrix sowie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Vektor. Dann ist die lineare Abbildung $\phi_A : K^n \mapsto K^m, x \mapsto Ax$ über die Matrix A repräsentiert:*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

Bemerkung 3.3. *Es gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:*

$$\phi_A(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } A$$

Die Spalten von A sind die Bilder der Standardbasisvektoren unter der Abbildung ϕ_A.

Bemerkung 3.4.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\phi_A = \phi_A(K^n) &= \{\boldsymbol{b} \in K^m \mid \exists \boldsymbol{x} \in K^n \ : \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \\ &= \operatorname{lin}(\phi_A(\boldsymbol{e}_i), \dots, \phi_A(\boldsymbol{e}_n)) \\ &= \text{Unterraum von } K^m\text{, der von den Spalten von } A \text{ aufgespannt wird.} \\ &=: \text{Spaltenraum von } A \end{aligned}$$

3.4 Rangberechnung

Definition 3.12 (Rang einer Matrix). *Der Rang einer Matrix ist definiert als*

$$\operatorname{rank}_K A := rank_K\phi_A = \dim_K \operatorname{lin}(\phi_A(\boldsymbol{e}_i), \dots, \phi_A(\boldsymbol{e}_n)).$$

Beispiel [2, 41]

Satz 3.9. *Der Rang einer Matrix A entspricht stets dem Rang einer Zeilenstufenform aus dem Gauß-Jordan-Agorithmus angewendet auf $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$*

Definition 3.13. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$. Die Matrix*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n\times m}$$

heißt Transponierte von A.

Proposition 3.7. *Sei* $A \in K^{l\times m}, B \in K^{m\times n}$. *Dann ist*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Bemerkung 3.5. *Der* <u>*Zeilenrang*</u> *einer Matrix ist definiert als der Rang von* A^T.

Folgerung 3.2. *Für* $A \in K^{m\times n}$ *ist der Zeilenrang von* A *gleich dem Rang von* A.

3.5 Darstellung linearer Abbildungen als Matrizen

Proposition 3.8. *Die Abbildung*

$$\phi : K^{m\times n} \mapsto \mathrm{Hom}(K^n, K^m); A \mapsto \phi_A$$

ist ein linearer Isomorphismus. Die Abbildung ϕ^{-1} *ordnet einer linearen Abbildung* ϕ : $K^n \mapsto K^m$ *die Matrix* $[\phi]$ *von* ϕ *bezüglich der Standardbasen von* K^n *und* K^m *zu.*

Folgerung 3.3. $dim_K \mathrm{Hom}(K^m, K^n) = m \cdot n$

Proposition 3.9. .

- $\forall\ A \in K^{l\times m}, B \in K^{m\times n} : \phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$
- $\forall\ \psi \in \mathrm{Hom}(K^l, K^m), \phi \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$:

$$[\phi \circ \psi] = [\phi] \cdot [\psi]$$

- *Die Abbildung*

$$\Phi : K^{n\times n} \mapsto \mathrm{End}(K^n) : A \mapsto \phi_A$$

  ist ein Ring-Isomorphismus.

Lemma 3.1. *Sei* V *ein* K*-Vektorraum mit* $\dim V = n$ *und sei* $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ *eine Basis von* V. *Dann lässt sich* $\boldsymbol{v} \in V$ *eindeutig schreiben als*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n.$$

Der <u>*Koordinatenvektor*</u> *von* $\boldsymbol{v}$ *bezüglich* B *ist definiert als*

$$[\boldsymbol{v}]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Die Abbildung

$$k_B : V \mapsto K^n; v \mapsto [v]_B$$

ist ein K*-Vektorraum-Isomorphismus, weil das Bild von* B *wegen* $[\boldsymbol{b}_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_i$ *eine Basis von* K^n *ist.*

Lemma 3.2. *Seien* V, W K*-Vektorräume und* $f : V \mapsto W$ *linear. Zu Basen* $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ *und* $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ *von* V *beziehungsweise* W *ist*

$$[f]_C^B := M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(b_i)]_C & \dots & [f(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

die Matrix von f *bezüglich* B *und* C.

Beweis [2, S. 46]

Proposition 3.10. *Für alle $v \in V$ gilt*

$$[f]_C^B\,[v]_B = [f(v)]_C\,.$$

Definition 3.14. *Für jede lineare Abbildung $f : V \mapsto W$ existiert zu gegebenen Basen B und C eine Matrix $[f]_C^B$. Wir definieren die Abbildung*

$$\Phi_C^B : \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto K^{m\times n}; f \mapsto [f]_C^B\,.$$

Proposition 3.11. $\Phi_C^B : \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto K^{m\times n}$ *ist ein linearer Isomorphismus.*

Proposition 3.12. *Seien U, V, W K-Vektorräume mit Basen A, B, C. Für die Abbildungen $g : U \mapsto V$ und $f : V \mapsto W$ gilt dann*

$$[f \circ g]_C^A = [f]_C^B \cdot [g]_B^A\,.$$

Das Diagram

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k_A"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_B"] & W \arrow[d, "k_C"] \\
K^p \arrow[r, "{[g]_B^A}"'] & K^n \arrow[r, "{[f]_C^B}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Beispiel [2, S. 48]

Definition 3.15 (Basiswechsel). *Seien $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ und $B' = (\boldsymbol{b'}_1, \ldots, \boldsymbol{b'}_n)$ Basen des K-Vektorraums V. Jedes $v \in V$ lässt sich bezüglich B und B' darstellen:*

$$[\boldsymbol{v}]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad [\boldsymbol{v}]'_B := \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

Für die Vektoren $b'_1, \ldots, b'_i$ existiert damit folgende Darstellung:

$$[\boldsymbol{b'}_i]_B := \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{pmatrix} \quad [\boldsymbol{b'}_i]_{B'} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$$

Die <u>Transformationsmatrix des Basiswechsels</u> von B' nach B ist dann definiert als

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} = [\mathrm{id}_v]_B^{B'}\,.$$

Proposition 3.13. *Sei $f : V \mapsto W$ linear. Außerdem seien B, B' Basen von V und C, C' Basen von W. Setze $S = [\mathrm{id}_v]_B^{B'}$ und $R = [\mathrm{id}_w]_C^{C'}$. Dann gilt*

$$[f]_{C'}^{B'} = R^{-1} \cdot [f]_C^B \cdot S$$

und

$$[f]_C^B = R \cdot [f]_{C'}^{B'} \cdot S^{-1}.$$

3.6 Gleichungssysteme

Sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper K gegeben:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

Alternativ kann das Gleichungssystem auch als

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (*)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Das zugehörige homogene Gleichungssystem lässt sich dann schreiben als $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad$ (**).

Proposition 3.14. *Die Lösungen von (**) bilden einen Untervektorraum U von K^n. Dabei ist $\dim U = n - \operatorname{rank} A =: k$. Eine Basis $(u_1, \dots, u_k)$ von U heißt System von Fundamentallösungen von (**). Jede Lösung von (**) ist Linearkombination der Fundamentallösungen.*

Proposition 3.15 (Existenz von Lösungen). .

- *Das homogene System (**) hat stets die triviale Lösung $x = 0$.*
- *Das inhomogene System (*) hat mindestens eine Lösung*

  $$\Leftrightarrow \quad b \in \textit{Spaltenraum von } A$$
  $$\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$$

  mit

  $$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Proposition 3.16. *Angenommen das inhomogene System (*) hat mindestens eine Lösung $x_0 \in K^n$. Dann ist*

$$x_0 + U = \{x_0 + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \mid \lambda_i \in K\}$$

die Menge aller Lösungen von (*).

Definition 3.16. *Sei V ein K-Vektorraum, $U \leq V, x \in V$. Dann heißt die Menge $x + U$ affiner Unterraum von V.*

Proposition 3.17. *Sei nun $m = n$, daher die Matrix $A \in K^{n\times n}$ quadratisch. Äquivalent sind*

- *Das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat eine eindeutige Lösung.*
- *A ist invertierbar.*
- $\operatorname{rank} A = n$

4 Determinanten

Definition 4.1. *Eine Determinante ist eine Abbildung* $\det : K^{n\times n} \mapsto K$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\det(E_n) = 1$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- A *invertierbar* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Definition 4.2. *Eine Abbildung* $F : K^n \times \cdots \times K^n \mapsto K$ *(für* $n \geq 1$*) heißt*

- *Multilinearform auf* K^n*, falls gilt* $\forall i\ \forall v_k\ \forall \lambda, \mu \in K\ \forall x, y\ inV$*:*

$$F(v_{ij}, \ldots, v_{i-1}, \lambda x + \mu y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$
$$= \lambda F(v_{ij}, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \mu F(v_{ij}, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

- *alternierende Multilinearform auf* K^n*, falls außer der Bedingung für Multilinearformen zusätzlich gilt:*

$$F(v_1, \ldots, v_n) = 0 \text{ falls } v_i = v_j \text{ für } i \neq j$$

- *normierte alternierende Multilinearform auf* K^n*, falls außer der Bedingung für alternierende Multilinearformen zusätzlich gilt:*

$$F(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

Beweis [2, S. 54]

Lemma 4.1. *Sei* $F : K^n \times K^n \mapsto K$ *eine alternierende Multilinearform und* $v_1, \ldots, v_n \in K^n$*. Dann gilt* $F(v_i, \ldots, v_n) = 0$*, falls* $(v_1, \ldots, v_n)$ *linear abhängig sind.*

Satz 4.1. *Sei* $F : K^n \times \cdots \times K^n \mapsto K$ *eine alternierende Multilinearform mit* $F(e_1, \ldots, e_n) = 0$*. Dann folgt* $F \equiv 0$*.*

Folgerung 4.1. *Seien* $F, G : K^n \times \cdots \times K^n \mapsto K$ *alternierende Linearformen mit* $F(e_1, \ldots, e_n) = G(e_1, \ldots, e_n)$*. Dann folgt dass* F *identisch* G *ist. Insbesondere gibt es höchstens eine Determinantenform auf* K^n*.*

4.1 Konstruktion der Determinantenform auf K^n

Satz 4.2. *Für die* K^1 *und* K^2 *Matrizen gelten folgende MLF:*

$$D_1 : K \longrightarrow K : x \mapsto x$$
$$D_2 : K \longrightarrow K : \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Satz 4.3 (Laplace-Entwicklung)**.** *Sei* $A \in K^{n\times n}$ *eine Matrix. Für die Determinante von* A *gilt dann:*

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$*. Dabei ist* $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ *durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus* A *hervorgegangen.*

Notation 4.1. *Statt* $D_n(A) = D_n((a_{ij}))$ *schreiben wir auch* $|a_{ij}|$ *beziehungsweise* $D_n(a_1, \ldots, a_n)$ *für* $A = (a_1, \ldots, a_n)$*.*

Lemma 4.2. *Die Abbildung* $D_n : K^{n\times n} \mapsto K$ *ist multilinear, alternierend und normiert.*

Definition 4.3. *Die Abbildung* $\det = D_n : K^{n\times n} \mapsto K$ *heißt Determinante auf* K^n*.*

4.2 Eigenschaften der Determinante

Proposition 4.1. *Für* $A \in K^{n\times n}$ *gilt* $\det(A^T) = det(A)$*.*

Proposition 4.2. *Seien* $A, B \in K^{n\times n}$*. Dann gilt*

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- *Falls* A *invertierbar ist, gilt* $\det(A) \neq 0$ *und* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = [\det(A)]^{-1}$*.*

Proposition 4.3. *Sei* $A \in K^{n\times n}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\det(A) \neq 0$
- $A \in GL_n(K)$*, daher* A *ist invertierbar.*
- $\forall\ b \in K^n$ *ist das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *eindeutig lösbar.*
- *Die Spalten von* A *sind linear unabhängig.*
- *Die Zeilen von* A *sind linear unabhängig.*
- $\operatorname{rank} A = n$

Definition 4.4. *Zwei Matrizen* $A, B \in K^{n\times n}$ *heißen ähnlich, falls ein* $S \in GL_n(K)$ *existiert mit* $B = S^{-1}AS$*.*

Proposition 4.4. *Ähnliche Matrizen haben die selbe Determinante. Insbesondere ist damit die Determinante eines beliebigen linearen Endomorphismus* $\phi : K^n \mapsto K^n$ *unabhängig von der Wahl der Basen eindeutig definiert.*

Satz 4.4. *Sei* $A = (a_{ij}) \in K^{(n\times n)}$*. Es gilt*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in Sym\{1,\dots,n\}} (-1)^{sgn(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Dabei ist σ *eine Permutation der Zahlen* $\{1, \dots, n\}$*.*

$$sgn(\sigma) := \textit{Anzahl der Paare } (i,j) \textit{ mit } 1 \leq i \leq j \leq n \textit{ und } \sigma(i) > \sigma(j)$$

$sgn(\sigma)$ *gibt die Zahl der Vertauschungen von Zweiertupeln an, die benötigt werden, um die Permutation* σ *zu erzeugen.*

Satz 4.5. *Sei* $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ *eine obere Dreiecksmatrix, daher* $a_{ij} = 0\ \forall\ i > j$*. Dann gilt*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Die selbe Aussage gilt auch für untere Dreiecksmatrizen.

5 Euklidische und unitäre Räume

Definition 5.1. *Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \times V \mapsto K$ heißt K-Bilinearform, falls gilt $\forall\ \alpha, \beta \in K\ \forall\ u, u', v'v' \in V$:*

$$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$$

und

$$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v')$$

Definition 5.2. *Die K-Bilinearform f heißt ausgeartet, falls ein $u \neq 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass $\forall\ v \in V$ gilt: $f(u, v) = 0$*

Definition 5.3. *Das Standardskalarprodukt ist die K-Bilinearform $f : V \times V \mapsto K$ mit*

$$f(u, v) = u^T v = u_1 v_1 + \cdots + u_d v_d.$$

Bemerkung 5.1. *Das Standardskalarprodukt ist symmetrisch, das heißt $\forall\ u, v \in V$ gilt*

$$f(u, v) = f(v, u).$$

Definition 5.4. *Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt das Standardskalarprodukt Euklidisches Skalarprodukt. Notation: $< u, v >= u^T v$*

Proposition 5.1. *Das euklidische Skalarprodukt ist $\mathbb{R}$-bilinear, symmetrisch und positiv definit, das heißt $\forall\ v \in \mathbb{R}^d$ gilt*

- $< v, v >\geq 0$
- $< v, v >= 0 \ \Leftrightarrow\ v = 0$

Definition 5.5. *Die euklidische Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ wird definiert als*

$$||v|| := \sqrt{< v, v >}.$$

Proposition 5.2. *Auf den komplexen Zahlen ist die Konjugation*

$$\overline{\cdot} : z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy$$

ein Körperautomorphismus mit der Eigenschaft

$$\overline{(\overline{z})} = z\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Definition 5.6. *Das hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^d$ ist definiert durch*

$$< z, w >:= z^T \overline{w} = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_d \overline{w}_d$$

Proposition 5.3. *Das hermitesche Skalarprodukt ist $\mathbb{C}$-semi-bilinear, hermitesch und positiv definit, das heißt es gilt $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall\ z, z'w, w' \in \mathbb{C}^d$:*

- $< \alpha z + \beta z', w >= \alpha < z, w > + \beta < z', w >$
- $< z, \alpha w + \beta w' >= \overline{\alpha} < z, w > + \overline{\beta} < z, w' >$
- $< z, w >= \overline{< w, z >}$
- $< z, z >\geq 0$
- $< z, z >= 0 \ \Leftrightarrow\ z = 0$

Definition 5.7. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer symmetrischen, positiv definiten $\mathbb{R}$-Bilinearform $< \cdot, \cdot >: V \times V \mapsto \mathbb{R}$. Dann heißt $(V, < \cdot, \cdot >)$ euklidischer Raum.*

Definition 5.8. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer hermiteschen, positiv definiten $\mathbb{C}$-Semi-Bilinearform $< \cdot, \cdot >: V \times V \mapsto \mathbb{C}$. Dann heißt $(V, < \cdot, \cdot >)$ unitärer Raum.*

Bemerkung 5.2. *Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein unitärer Raum. Insbesondere ist V ein komplexer Vektorraum mit Skalarmultiplikation*

$$\mathbb{C} \times V \mapsto V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Diese lässt sich einschränken auf reelle Skalare

$$\mathbb{R} \times V \mapsto V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

und man erhält einen reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$.
Weiter ist dann

$$(v, w) := \mathrm{Re}(< v, w >) = \frac{1}{2}(< v, w > + < w, v >) = \frac{1}{2}(< v, w > + \overline{< v, w >})$$

eine $\mathbb{R}$-Bilinearform auf $V_{\mathbb{R}}$, die symmetrisch und positiv definit ist, daher $(V_{\mathbb{R}}, < \cdot, \cdot >)$ ist ein euklidischer Raum.

Definition 5.9. *Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein euklidischer oder unitäter Raum. Dann definiert*

$$||v|| := \sqrt{< v, v >}$$

die Norm von $v \in V$. Ferner heißen $v, w \in V$ orthogonal, falls gilt $< v, w >= 0$. Vektoren der Norm 1 heißen Einheitsvektoren.

Bemerkung 5.3. *Für $\alpha \in K$ und $v \in V$ gilt*

$$||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}} \sqrt{< v, v >} = |\alpha| \cdot ||v||.$$

5.1 Geometrische Eigenschaften euklidischer und unitärer Räume

Bemerkung 5.4 (Polarisierungsidentitäten). .

- *Im euklidischen Fall:*

$$< x, y >= \frac{1}{4} \cdot (||x + y||^2 - ||x - y||^2)$$

- *Im unitären Fall:*

$$< x, y >= \frac{1}{4} \cdot (||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2)$$

Sowohl im euklidischen als auch im unitären Raum ist das Skalarproduckt durch die Norm bestimmt.

Satz 5.1 (Satz des Pythagoras).

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad ||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$$

Satz 5.2 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz).

$$| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Definition 5.10. *Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Zu $x, y \in V \setminus \{0\}$ sei der Winkel $\gamma \in [0, \pi]$ definiert durch*

$$\cos \gamma = \frac{\mathrm{Re} < x, y >}{||x|| \cdot ||y||}.$$

6 Metrische Räume

Definition 6.1. *Eine Menge M mit einer Abbildung*

$$d : MxM \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ (\underline{Metrik})}$$

heißt <u>*metrischer Raum*</u>*, falls gilt* $\forall\ x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (<u>*Symmetrie*</u>)
2. $d(x, y) \geq 0$
   $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (<u>*Definitheit*</u>)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (<u>*Dreiecksungleichung*</u>)

Beweis [2, S. 66]

Satz 6.1. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer oder unitärer Raum. Dann definiert*

$$d(x, y) := ||x - y|| = \sqrt{< x - y, x - y >}$$

eine Metrik auf V.

Satz 6.2. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer oder unitärer Raum.*

- $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \ \Leftrightarrow\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : y = \alpha x$
- $| < x, y > | = ||x|| \cdot ||y|| \ \Leftrightarrow\ x, y$ *linear abhängig*

Satz 6.3. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer Raum.*

- $\forall\ x, y \in V\ \exists!\ m_{x,y} \in V$:
  $D(x, m_{x,y}) = d(y, m_{x,y}) = \frac{1}{2} d(x, y)$ (<u>*Mittelpunkt*</u>)
- *Sei* $\phi : V \mapsto V$ *eine Abbildung mit* $\phi(0) = 0$ *und* $d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$ *für alle* $x, y \in V$ (<u>*abstandserhaltend*</u>). *Dann gilt:* ϕ *ist linear.*

6.1 Orthonormalbasen

Definition 6.2. *Eine Familie* $(v_1, \ldots, v_m) \in V \setminus \{0\}$ *heißt* <u>*Orthogonalsystem*</u>*, falls gilt*

$$v_i \perp v_j \text{ für } i \neq j.$$

Gilt zusätzlich $||v_i|| = 1$*, dann heißt das System* <u>*Orthonormalsystem*</u>*.*
Ein Orthonormalsystem, das eine Basis von V ist, heißt <u>*Orthonormalbasis*</u>*.*

Beispiel [2, S. 68]

Lemma 6.1. *Jedes Orthogonalsystem* $(v_1, \ldots, v_m)$ *ist linear unabhängig.*

Beweis [2, S. 68]

Beispiel [2, S. 69]

Bemerkung 6.1 (Koordinaten bezüglich Orthonormalbasen). *Sei* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Orthonormalbasis von V. Dann lässt sich ein beliebiges* $v \in V$ *eindeutig darstellen als*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\ ,\ \lambda_i \in K.$$

$$v = < v, v_1 > \cdot v_1 + \cdots + < v, v_n > \cdot v_n$$

6.1.1 Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

Sei $(b_1, \ldots, b_m)$ eine linear unabhängige Familie in V. Es gilt $\dim_K(b_1, \ldots, b_m) = m$. Im Folgenden konstruieren wir eine Orthonormalbasis für $U := \text{lin}(b_1, \ldots, b_m)$:

$$\begin{array}{ll} u_1 := b_1 & v_1 := \frac{u_1}{||u_1||} \\ u_2 := b_2 - < b_2, v_1 > \cdot v_1 & v_2 := \frac{u_2}{||u_2||} \\ u_3 := b_3 - < b_3, v_1 > \cdot v_1 - < b_3, v_2 > \cdot v_2 & v_3 := \frac{u_3}{||u_3||} \\ \vdots & \vdots \\ u_m := b_m - \sum_{i=1}^{m-1} < b_m, v_i > \cdot v_i & v_m := \frac{u_m}{||u_m||} \end{array}$$

Beweis [2, S. 70]

Satz 6.4. $(v_1, \ldots, v_k)$ *ist eine Orthonormalbasis für* $\text{lin}(b_1, \ldots, b_m)$ *für alle* $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Folgerung 6.1. *Jeder endlich dimensionale Teilraum von V bestizt eine Orthonormalbasis.*

6.2 Orthogonale Teilräume

Definition 6.3. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer oder unitärer Raum. Zu* $M \subseteq V$ *setze*

$$M^\perp := \{v \in V | \ \forall \ m \in M :< v, m >= 0\}.$$

Lemma 6.2. $M^\perp$ *ist linearer Teilraum von V.*

Proposition 6.1. *Seien* $A, B \subseteq V$. *Dann gilt:*

- $A \subseteq B \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$
- $A \subseteq B^\perp \Rightarrow B \subseteq A^\perp$
- $A \subseteq (A^\perp)^\perp$
- $A^\perp \subseteq ((A^\perp)^\perp)^\perp$

Bemerkung 6.2. *Sei* $V = \mathbb{R}^n$ *und* $a \in V$. *Dann ist* $a^\perp := \{a\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n :< a, v >= 0\}$ *(Hyperebene). Für* $a = (a_1, \ldots, a_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ *gilt* $< a, x >= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, *das heißt* $a^\perp$ *ist die Lösungsmenge der linearen Gleichung* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
Weiter gilt für $a, b, c, \cdots \in \mathbb{R}^n$, *dass* $a, b, c, \ldots^\perp = a^\perp \cap b^\perp \cap c^\perp \ldots$ *die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems.*

Lemma 6.3. *Seien* $a_1, \ldots, a_m \in V$ *und* $U := lin(a_1, \ldots, a_m)$. *Dann gilt*

$$U^\perp = \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp.$$

Satz 6.5 (Orthogonalprojektion). *Sei* $U \leqslant V$ *endlich-dimensionaler Teilraum mit Orthonormalbasis* $(u_1, \ldots, u_m)$. *Für die Abbildung*

$$\pi : V \mapsto U; \ v \mapsto \pi(v) = \sum_{i=1}^{m} < v, u_i > \cdot u_i$$

gelten folgende Eigenschaften:

- π *ist linear.*
- $\pi(v) \in U \ \forall \ v \in V$

- $\pi(u) = u \; \forall \; u \in U$
- $\pi \circ \pi = \pi$
- $\mathrm{Im}(\pi) = U$ *und* $\mathrm{Ker}(\pi) = U^\perp$
- $v - \pi(v) \in U^\perp$ *für alle* $v \in V$
- $||v - \pi(v)|| \leq ||v - u||$ *für alle* $v \in V$ *und* $u \in U$*; Gleichheit gilt nur für* $u = \pi(v)$.

Aus dem letzten Punkt folgt, dass π *nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis abhängt.*

6.3 Summen in Vektorräumen

Definition 6.4. *Sei* V *ein Vektorraum über einem beliebigen Körper* K*. Für beliebige Teilmengen* $A, B \subseteq V$ *heißt*

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

(Minkowski-)Summe von A *und* B*.*

Beispiel [2, S. 74]

Lemma 6.4. *Falls* $A, B \leq V$ *Teilräume sind, so ist auch* $A + B \leq V$ *ein Teilraum.*

Lemma 6.5. *Seien* $A, B \leq V$ *endlich-dimensionale Teilräume. Dann gilt* $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

Definition 6.5. *Seien* $A, B \leq V$ *Teilräume mit* $A \cap B = \{0\}$*. Dann heißt* $A \bigoplus B := A + B$ *die (innere) direkte Summe von* A *und* B*.*

Proposition 6.2. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer oder unitärer Raum und sei* $U \leq V$ *ein endlich-dimensionaler Teilraum. Dann gilt*

$$V = U \oplus U^\perp \text{ und } U \cap U^\perp = \{0\}.$$

Falls $\dim_K < \infty$ *gilt, dann ist* $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.

Beispiel [2, S. 75f]

Folgerung 6.2. *Sein* $U \leq V$ *ein endlich-dimensionaler Teilraum. Dann gilt* $(U^\perp)^\perp = U$.

Bemerkung 6.3. *Die Funktionen* v_k *und* w_k *die für* $x \in [0, 1]$ *definiert sind durch*

$$v_k(x) = \cos(2\pi k x) \text{ und } w_k = \sin(2\pi k x)$$

für $k \in \mathbb{N}$*, bilden ein Orthogonalsystem in* $\varsigma[0, 1]$*. Durch Skalierung mit* $\sqrt{2}$ *erhalten wir ein Orthonormalsystem von Funktionen* $v'_0, v'_1, \ldots, w'_1, w'_2, \ldots$*.*

Definition 6.6. *Der lineare Teilraum* $T_n := lin(v_0, v_1, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *heißt Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad* $\leq n$*.*

Definition 6.7. *Es sei* $\Pi_n : \mathbb{C} \mapsto \tau_n$ *die orthogonale Projektion auf den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad* $\leq n$*.* $\Pi_n(f)$ *die zu* $f \in \mathbb{C}[0, 1]$ *bezüglich der* L_2 *Norm beste Approximation vom Grad* $\leq n$*. Es gilt*

$$\Pi_n(f) = < f, v'_0 > \cdot v'_0 + \sum_{k=1}^{n} (< f, v'_k > \cdot v'_k + < f, w'_k > \cdot w'_k)$$

$$= \frac{< f, v_0 > v_0}{||v||^2} + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))$$

mit $a_k = 2\int_0^1 f(x)cos(2\pi kx)dx$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *und* $b_k = 2\int_0^1 f(x)sin(2\pi kx)dx$ *für* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))$ *heißt* <u>*Fourierreihe*</u> *von f.*
Falls f zweimal stetig differenzierbar und f(0)=1, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

6.4 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Definition 6.8. *Sei* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *ein euklidischer (oder unitärer) Raum. Eine invertierbare lineare Abbildung* $\varphi : V \mapsto V$ *heißt* <u>*orthogonal*</u> *(bzw.* <u>*unitär*</u>*), falls gilt:*

$$< \varphi(x), \varphi(y) >=< x, y > \;\; \forall\; x, y \in V$$

Bemerkung 6.4. *Orhtogonale (bzw. unitäre) Abbildungen erhalten Längen und Winkel. Für* $\dim < \infty$ *folgt die Invertierbarkeit aus der Isometrieeigenschaft.*

Definition 6.9. *Die Menge GL(V) aller invertierbaren linearen Abbildungen von V nach V bilden eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung.*
Für $(V, < \cdot, \cdot >)$ *euklidisch heißt* $O(V) := \{\varphi \in GL(V) |\ \varphi \text{ orthogonal}\}$ *die* <u>*orthogonale Gruppe*</u> *von V. Für* $(V, < \cdot, \cdot >)$ *unitär heißt* $U(V) := \{\varphi \in GL(V) |\ \varphi \text{ unitär}\}$ *die* <u>*unitäre Gruppe*</u> *von V.*

Proposition 6.3. *Sei* $(v_1, \dots, v_n)$ *eine Orthonormalbasis von V. Es gilt:*

$$\varphi \in GL(V) \text{ orthogonal } \Leftrightarrow \; (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \text{ Orthonormalbasis von V.}$$

Definition 6.10. *Eine Matrix* $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *heißt* <u>*orthogonal*</u>*, falls gilt* $Q \cdot Q^T = E_n$*. Außerdem gilt dann* $\det(Q) = \pm 1$.

Notation 6.1. $O_n\mathbb{R} := \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ QQ^T = E_n\} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$

Definition 6.11. *Für* $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *heißt die Matrix* $M^* := \overline{M}^T = (\overline{m}_{ji})_{ij}$ *die* <u>*adjungierte*</u> *Matrix.*

Definition 6.12. *Eine Matrix* $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *heißt* <u>*unitär*</u>*, falls gilt* $Q \cdot Q^* = E_n$*. Außerdem gilt dann* $\det(Q) = \pm 1$.

Notation 6.2. $U_n\mathbb{C} := \{Q \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ Q^{-1} = Q^*\} \subseteq GL(\mathbb{C})$

Definition 6.13. *Die Gruppe* $SL_nK := \{M \in GL_nK |\ \det(M) = 1\}$ *mit* $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *heißt die* <u>*spezielle lineare Gruppe*</u> *auf* K^n.

Definition 6.14. *Die Gruppe* $SO_n\mathbb{R} := O_n\mathbb{R} \cap SL_n\mathbb{R}$ *heißt die* <u>*spezielle orthogonale Gruppe*</u> *oder Gruppe der Drehungen auf* $\mathbb{R}^n$.

Definition 6.15. *Die Gruppe* $SU_n\mathbb{C} := U_n\mathbb{C} \;\cap\; SL_n\mathbb{C}$ *heißt die* <u>*spezielle unitäre Gruppe*</u> *auf* $\mathbb{C}^n$.

Lemma 6.6.

$$O_n\mathbb{R} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$
$$U_n\mathbb{C} \subseteq GL_n(\mathbb{C})$$

Satz 6.6. *Es sei $Q \in K^{n \times n}$. Äquivalent sind:*

- *Die lineare Abbildung $\phi : K^n \mapsto K^n$ ist orthogonal bzw. unitär bezüglich dem euklidischen (bzw. hermiteschen) Skalarprodukt auf K^n, das heißt*

$$\forall\ v, w \in K^n :< Qv, Qw >=< v, w > .$$

- *Die Spalten $s_1, \ldots, s_n$ der Matrix Q bilden ein Orthonormalsystem, das heißt*

$$< s_i, s_j >= \delta_i j = \begin{cases} 1, & \textit{falls } i = j \\ 0, & \textit{ansonsten} \end{cases}.$$

- *Q ist eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix, das heißt $QQ^T = E_n$ ($QQ^* = E_n$).*
- *Q ist invertierbar, und es gilt $Q^{-1} = Q^T$.*
- *Die Zeilen von Q bilden ein Orthonormalsystem.*
- *Q^T ist eine orthogonale Matrix, dh. $Q^T Q = E_n$.*

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel [2, S. 83f]

Definition 7.1. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \mapsto V$ ein K-linearer Endomorphismus. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von ϕ, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert, so dass*

$$\phi(v) = \lambda \cdot v.$$

Jeder von Null verschiedene Vektor w, für den gilt $\phi(w) = \lambda \cdot w$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.
Der Unterraum

$$V_\lambda := V_\lambda(\phi) := ker(\phi - \lambda \cdot id_v) = \{v \in V | \phi(v) = \lambda \cdot v\}$$

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ bzgl. ϕ. Die Dimension $d_\lambda := \dim(V_\lambda) \geq 1$ heißt geometrische Vielfachheit von λ.

Definition 7.2. *Eine lineare Abbildung ϕ heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren besteht. Das heißt die zugehörige Matrix von ϕ bezüglich dieser Basis ist eine Diagonalmatrix.*

Bemerkung 7.1. *Es gilt:*

- λ *Eigenwert von* $\phi \;\Leftrightarrow\; \exists\, v \neq 0 : (\phi - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{0\}$
- v *ist Eigenvektor von* ϕ *bezüglich des Eigenwerts* $\lambda \;\Leftrightarrow v \neq 0$ *und* $(\phi - \lambda \cdot \mathrm{id})(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in \mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$ *(charakteristische Gleichung)*

Satz 7.1. *Sei $\phi \in End(V)$. Es gilt:*

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \phi \;\Leftrightarrow\; \det(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$$

Zur Berechnung der Eigenvektoren bezüglich der Eigenwerte löst man die Gleichung $(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) \cdot v = 0$.

Beispiel [2, S. 85]

Definition 7.3. *Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von M, falls λ Eigenwert von*

$$\phi_M : K^n \mapsto K^n \;,\; x \mapsto M_x$$

ist. Analog für Eigenvektoren $M \cdot v = \lambda v$.

Satz 7.2. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von ϕ und $v_1, \ldots, v_r$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig.*

Folgerung 7.1. *Falls ϕ sogar $n = \dim_K V$ paarweise verschiedene Eigenwerte hat, so ist ϕ auch diagonalisierbar.*

Bemerkung 7.2. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschiedene Eigenwerte von ϕ mit den geometrischen Vielfachheiten $d_1, \ldots, d_n$. Sei $(b_{i1}, \ldots, b_{id_i})$ eine Basis des Eigenraums V_λ. Dann ist $B = (b_{11}, \ldots, b_{1d_1}, \ldots, b_{r1}, b_{rd_r})$ eine Basis von $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ Falls gilt $d_1 + \cdots + d_r = n$, dann ist $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} = V$ und ϕ ist diagonalisierbar:*

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r & \\ & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

7.1 Polynome

Definition 7.4. *Sei K ein Körper. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \mapsto K : n \mapsto a_n$ mit der Eigenschaft, dass $\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n > N : a_n = 0$ heißt* <u>*Polynom*</u> *mit Koeffizienten in K.*

Notation 7.1. *Wir schreiben eine Funktion*

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, \dots)$$

als

$$a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N,$$

wobei das Symbol t eine <u>*Unbestimmte*</u> *und kein Element aus K ist.*
$K[t] = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N \mid a_i \in K, N \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K in der Unbestimmten t.

Proposition 7.1. *Mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Skalarmultiplikation ist $K[t]$ ein K-Vektorraum mit Basis $(1, t, t^2, \dots)$. Insbesondere ist $K[t]$ ein unendlich-dimensionaler K-Vektorraum.*

Definition 7.5. *Zusätzlich kann man eine* <u>*Polynommultiplikation*</u> *definieren:*

$$(a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N) \cdot (b_0 + b_1 t + \dots + b_M t^M)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + \dots + \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) t^k + \dots + a_N b_M t^{N+M}$$

Satz 7.3. *$(K[t], +, \cdot)$ ist eine* <u>*kommutative K-Algebra*</u>*, das heißt es gilt:*

- *$(K[t], +, \cdot)$ mit der Skalarmultiplikation $\cdot$ ist ein K-Vektorraum.*
- *$(K[t], +, \cdot)$ mit der Polynommultiplikation $\cdot$ ist ein kommutativer Ring.*
- *Es gibt ein multiplikatives Neutralelement 1.*
- *Es gilt $(\lambda a)b = \lambda(ab)\ \forall\ \lambda \in K; a, b \in K[t]$.*

Definition 7.6. *Sei $a : \mathbb{N} \mapsto K : \ n \mapsto a_n$ ein Polynom. Falls $a = 0$, setze $deg(a) = -\infty$. Für $a \neq 0$ sei $deg(a) := \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n > N : a_n = 0\}$. Die Zahl $deg(a) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ heißt* <u>*Grad*</u> *von a.*

Lemma 7.1. *Seien $a, b \in K[t]$. Dann gilt:*

- *$deg(a + b) \leq \max(deg(a), deg(b))$*
- *$deg(a \cdot b) = deg(a) + deg(b)$*

Folgerung 7.2. *Sei $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$. Dann ist $a \cdot b \neq 0$, das heißt der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrei.*

Beispiel [2, S. 88f]

Definition 7.7. *Zu einem Polynom $a = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \in K[t]$ kann man die* <u>*Auswertungsabbildung*</u> *oder auch* <u>*Polynomfunktion*</u>

$$\tilde{a} : K \mapsto K\ ,\ \lambda \mapsto a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$$

betrachten.

Definition 7.8. *Die Zahl $\lambda \in K$ heißt Nullstelle von $a \in K[t]$, falls gilt*

$$\tilde{a} = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_N\lambda^N = 0.$$

Proposition 7.2. *Ist $a \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$ mit einer Nullstelle $\lambda \in K$, so existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $b \in K[t]$ mit $deg(b) = d-1$ und $a = (t-\lambda)b$.*

Bemerkung 7.3. *Die Umkehrung von Proposition 7.2 gilt ebenfalls: Falls $a = (t - \lambda)b$, dann ist λ Nullstelle von a.*

Folgerung 7.3. *Ein Polynom in $K[t]$ vom Grad d hat höchstens d Nullstellen in K.*

Definition 7.9. *Seien $a \in K[t]$ und $\lambda \in K$, so dass $a = (t-\lambda)^s b$ für $s \geq 1$ und $b \in K$ mit $\tilde{b}(\lambda) \neq 0$ Dann heißt s die Vielfachheit der Nullstelle λ von a, und λ heißt s-fache Nullstelle von a.*

Bemerkung 7.4. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen des Polynoms $a \in K[t]$ mit Vielfachheiten $s_1, \ldots, s_r$. Dann existiert eindeutig ein Polynom $b \in K[t]$ ohne Nullstellen, so dass*

$$a = (t - \lambda_1)^{s_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_r)^{s_r} \cdot b.$$

Bemerkung 7.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom $a \in \mathbb{C}[t]$ mit $deg(a) \geq 1$ besitzt eine Nullstelle. Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.*

7.2 Charakteristische Polynome

Beispiel [2, S. 90]

Definition 7.10. *Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Die Determinante*

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$$

heißt charakteristisches Polynom von A.

Satz 7.4. *$\chi_A(t) \in K[t]$ ist ein Polynom vom Grad n. Es gilt*

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(tA)t^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Bemerkung 7.6. *Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.*

Definition 7.11. *Sei λ Eigenwert von A. Dann heißt die Vielfachheit der Nullstelle λ in $\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E_n)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ.*

Beispiel [2, S. 92]

Proposition 7.3. *Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit d_λ stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.*

Satz 7.5. *Die Matrix A ist diagonalisierbar über K genau dann wenn $\chi_A \in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt, daher*

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_r)^{l_r},$$

und falls für jeden Eigenwert λ_i die allgemeine Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt.

Bemerkung 7.7. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom. Daher haben sie auch die gleichen Eigenwerte.*
Umgekehrt, zerfällt $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_r - t)^{l_r}$ in Linearfaktoren und $l_i = d_i \; \forall \; i$. Dann folgt $n = deg\chi_A = l_1 + \cdots + l_r = d_1 + \cdots + d_r$ und damit $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_r}$ und A ist diagonalisierbar.

Folgerung 7.4. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen.*

Folgerung 7.5. *Jede komplexe Matrix besitzt einen Eigenwert.*

Definition 7.12. *Sei neben der in Definition 7.7 angegebenen Abbildung die Auswertungsabbildung*

$$\tilde{\tilde{a}} : K^{n\times n} \mapsto K^{n\times n} : M \mapsto a_0 E_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_n M^n$$

definiert.

Bemerkung 7.8. *.*

- *Die Abbildung $\Phi_M : k[z] \mapsto K^{nxn} : a \mapsto a \quad (M)$ ist ein K-Algebra-Homomorphismus.*
- *Man kann ebenso eine Auswertungsabbildung in $End_K V$ betrachten für beliebige K-Vektorräume V.*

Bemerkung 7.9. *.*

- *Der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrei, aber der Ring $K^{n\times n}$, $n \geq 2$ ist dies nicht.*
- *Es gilt $\forall\ \lambda \in K$:*

$$\tilde{\tilde{a}}(\lambda E_n) = a_0 E_n + a_1 \lambda E_n^1 + \cdots + a_n \lambda^N E_n^N = \tilde{a}(\lambda) E_n$$

  Das heißt falls λ Nullstelle von a ist, so gilt $\tilde{\tilde{a}}(\lambda E_n) = 0$

Beweis [2, S. 96f]

Satz 7.6 (Cayley-Hamilton)**.** *Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann gilt $\tilde{\tilde{\chi}}_M(M) = 0$.*

Beweis [2, S. 97f]

Beispiel [2, S. 98]

Satz 7.7. *Für jede Matrix existiert genau ein Polynom μ_A minimalen Grades mit Leitkoeffizient 1, für das gilt*

$$\tilde{\tilde{\mu}}_A(A) = 0.$$

Das Polynom $\mu_A \in k[t]$ heißt das Minimalpolynom von A.

Bemerkung 7.10. *Die Existenz annullierender Polynome zu linearen Abbildungen ist nur im endlich-dimensionalen Vektorraum gesichert.*

Satz 7.8. *Ähnliche Matrizen haben das selbe Minimalpolynom.*

Satz 7.9. *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann haben χ_A und μ_A die selben Nullstellen.*

8 Diagonalisierung normaler Matrizen

Im Folgenden sei stets $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(K^n, < \cdot, \cdot >)$ der Standard-euklidische bzw. -unitäre Raum.

Definition 8.1. *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Adjungierte von A ist definiert als*

$$A^* = \overline{A}^\top = \overline{A^\top} = (\overline{a}_{ij})$$

mit $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$.

Lemma 8.1 (Rechenregeln).

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \text{ für } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(AB)^* = B^* A^*, A^{**} = A$$

Definition 8.2. *Sei $A \in K^{n \times n}$*

- *A symmetrisch $\Leftrightarrow$ $A = A^\top$*
- *A schifsymmetrisch $\Leftrightarrow$ $A = -A^\top$*
- *A hermitesch $\Leftrightarrow$ $A = A^*$ selbstadjungiert*
- *A schiefhermitesch $\Leftrightarrow$ $A = -A^*$*

Lemma 8.2. *Es gilt für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:*

- $A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}) + \frac{1}{2}(A - \overline{A})$
- $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A^\top)$
- $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$

Lemma 8.3. *Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt*

$$< Av, w > = < v, A^* w > .$$

Folgerung 8.1. $< v, Aw > = < v, A^{**} > = < v, (A^*)^* w > = < A^* v, w >$

Definition 8.3. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt normal, falls gilt*

$$AA^* = A^* A.$$

Bemerkung 8.1. *Normal sind die folgenden Matrizen:*

- *unitäre Matrizen*
- *reelle orthogonale Matrizen*
- *Diagonalmatrizen*
- *hermitesche und schiefhermitesche Matrizen*
- *reelle symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*

Lemma 8.4. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normal. Dann gilt:*

- $A - \lambda E_n$ *ist normal* $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$
- Q^*AQ *ist normal* $\forall\ Q \in \mathbb{U}_n\mathbb{C}$

Lemma 8.5. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normal. Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* A *und* v *zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt:* $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ *ist Eigenwert von* A^* *mit zugehörigem Eigenvektor* v*.*

Proposition 8.1. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *hermitesch. Dann sind alle Eigenwerte von* A *reell. Insbesondere sind die komplexen Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen stets reell.*

Bemerkung 8.2. *Komplexe symmetrische Matrizen können nicht-reelle Eigenwerte haben.*

Satz 8.1. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normal. Dann sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.*

Satz 8.2. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *eine Matrix. Äquivalent sind:*

- A *ist normal.*
- $\mathbb{C}^n$ *besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu* A*.*
- *Es existiert* $Q \in \mathbb{U}_n\mathbb{C}$*, sodass* $Q^{-1}AQ$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Satz 8.3. *Für* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *sind äquivalent:*

- A *ist hermitesch.*
- A *ist normal und alle Eigenwerte sind reell.*
- $\exists Q \in \mathbb{U}_n\mathbb{C}$*, sodass* $Q^{-1}AQ$ *eine reelle Diagonalmatrix ist.*

Satz 8.4. *Für* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sind äquivalent:*

- A *ist symmetrisch.*
- $\mathbb{R}^n$ *besitzt Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu* A*.*
- $\exists Q \in \mathbb{O}_n\mathbb{R}$*, sodass* $Q^{-1}AQ$ *eine (reelle) Diagonalmatrix ist.*

Satz 8.5. *Für* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *sind äquivalent:*

- A *unitär*
- A *ist normal und alle Eigenwerte haben den Betrag 1.*
- $\exists Q \in \mathbb{U}_n\mathbb{C}$*, sodass* $Q^{-1}AQ$ *eine Diagonalmatrix mit dem Betrag der Einträge von 1 ist.*

9 Jordansche Normalform

Definition 9.1. *Sei K ein beliebiger Körper. Ein Jordanblock oder elementare Jordanmatrix ist eine Matrix*

$$J_{m,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m \times m}$$

Lemma 9.1. *Ein Jordanblock $J_{m,\lambda}$ mit $m > 1$ ist nicht diagonalisierbar. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist eindimensional.*

Lemma 9.2. $\mu_{J_{m,\lambda}} = \chi_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$

Definition 9.2. *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ besitzt Jordansche Normalform, falls sie eine Blockdiagonalmatrix aus Jordanblöcken ist:*

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_1,\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k,\lambda_k} \end{pmatrix}$$

Satz 9.1. *Sei $V \in \mathbb{C}^n$ und $\phi \in End_{\mathbb{C}}V$ ein Endomorphismus. Dann existiert eine Basis B von V, sodass $[\phi]_B$ Jordansche Normalform besitzt.*

Folgerung 9.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform, daher existiert $B \in GL_n\mathbb{C} : B^{-1}AB$ in Jordanscher Normalform ist.*

Folgerung 9.2. *Zwei komplexe Matrizen sind ähnlich genau dann wenn sie bis auf Umordnungen der Jordanblöcke dieselbe Jordansche Normalform haben.*

Sei $V = \mathbb{C}^n, \phi \in End_{\mathbb{C}}V$ und λ ein Eigenvektor von ϕ. Sei $B = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V bezüglich derer gilt:

$$[\phi[_B = \begin{pmatrix} J_{m,\lambda} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(v_1) & = & \lambda v_1 \\ \phi(v_2) & = & v_1 + \lambda v_2 \\ & \vdots & \\ \phi(v_m) & = & v_{m-1} + \lambda v_m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v_1 & = & 0 \\ (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v_2 & = & v1 \\ & \vdots & \\ (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v_m & = & v_{m-1} \end{array} \right.$$

Definition 9.3. *Eine Familie $(v_1, \dots, v_m)$ in V heißt Jordankette zum Eigenvektor λ von ϕ, falls $v_1 \neq 0$ und (*) erfüllt ist.*

Lemma 9.3. *Eine Jordankette zum Eigenwert λ von ϕ ist linear unabhängig.*

Definition 9.4. *Ein Vektor $v \in V\backslash\{0\}$ heißt verallgemeinerter Eigenvektor (oder Hauptvektor) von ϕ, falls ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$(**) \quad (\phi - \lambda\,\mathrm{id})^m \cdot v = 0$$

Das kleinste $m \in \mathbb{N}$, für das (**) gilt, heißt Stufe von v.

Definition 9.5. *Sei v ein Hauptvektor der Stufe m. Wir setzten*

$$\begin{aligned} v_1 &:= (\phi - \lambda \operatorname{id})^{m-1} v \\ v_2 &:= (\phi - \lambda \operatorname{id})^{m-2} v \\ &\vdots \\ v_{m-1} &:= (\phi - \lambda \operatorname{id}) v \\ v_m &:= v \end{aligned}$$

Dann gilt offenbar (*), und $(v_1, \dots, v_m)$ ist eine Jordankette, also linear unabhängig.

$$\Rightarrow m \leq n$$

Definition 9.6.

$$V^\lambda(\phi) := \bigcup_{kin\mathbb{N}} ker(\phi - \lambda \operatorname{id})^k = lin(v_1, \dots, v_m)$$

heißt verallgemeinerter Eigenraum von λ.

Satz 9.2. *Sei $V = \mathbb{C}^n$, $\phi \in End_{\mathbb{C}} V$ mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Dann gilt*

$$V = V^{\lambda_1}(\phi) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}(\phi).$$

Bemerkung 9.1. *$dim V^{\lambda_i}(\phi) =$ algebraische Vielfachheit von λ*

Beweis [2, S. 107]

Lemma 9.4. *Sei $\zeta = (v_1^1, \dots, v_{l_1}^1, v_1^2, \dots, v_{l_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{l_s}^s)$ eine Familie von s Jordanketten zum Eigenwert λ von ϕ, daher*

$$(\phi - \lambda \operatorname{id}) v_{j+1}^i = v_j^i \text{ für } 1 \leq j \leq l_i$$

und

$$(\phi - \lambda \operatorname{id}) v_1^i = 0$$

Sind die Eigenvektoren $v_1^1, \dots, v_1^s$ linear unabhängig, so sind alle Vektoren von ζ linear unabhängig.

Beweis [2, S. 107f]

Lemma 9.5. *Sei $\zeta = (v_1^1, \dots, v_{l_1}^1, v_1^2, \dots, v_{l_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{l_s}^s)$, aber linear abhängig. Dann existiert eine Familie ζ' von Jordanketten mit $lin(\zeta) = lin(\zeta')$, die einen Vektor weniger als ζ enthält.*

Satz 9.3. *Für jeden Eigenwert λ von ϕ besitzt der verallgemeinerte Eigenraum $V^\lambda(\phi)$ eine Jordanbasis.*

Beispiel [2, S. 109f]

9.1 Verfahren zur Bestimmung einer Jordanbasis

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\phi \in End_{\mathbb{C}} V$. Nachfolgend ist ein Verfahren zur Bestimmung einer Jordanbasis von V bezüglich ϕ angegeben, sodass also $[\phi]_J$ Jordansche Normalform besitzt.

- Bestimme Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von ϕ mit ihren algebraischen Vielfachheiten $l_1, \dots, l_k$.
- Für jeden Eigenwert λ_i: Bestimme die Basis des verallgemeinerten Eigenraums $V^{\lambda_1}(\phi)$. Dazu löst man schrittweise die linearen Gleichungssysteme

  $$(\phi - \lambda_i \operatorname{id})^j v = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots$$

  bis man l_i linear unabhängige Lösungen gefunden hat.
- Bilde Jordanketten und verkürze sie schrittweise durch Anwendung von Lemma 9.5, bis man eine Basis erhält.
- Die Matrix des Basiswechsels besitzt als Spalten verallgemeinerte Eigenvektoren (kettenweise aufsteigend).

10 Quadratische Formen

Definition 10.1. *Eine Abbildung $Q : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt quadratische Form, falls gilt:* Beispiel [2, S. 111]

- $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
- $\beta_Q : V \times V \mapsto \mathbb{R} : \quad (u,v) \mapsto \frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right]$ *ist eine symmetrische Bilinearform.*

Definition 10.2. *Q heißt die zu β assoziierte quadratische Form.*

Bemerkung 10.1. *Die aus Definition 10.1 resultierende Entsprechung zwischen quadratischer Form und symmetrischer Bilinearform gilt allgemein über beliebigen Körpern, in denen $1 + 1 \neq 0$ gilt.*

Sei nun $V = \mathbb{R}^n$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Sei $\beta : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Definiere $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i,j \leq n$ durch $\beta_{ij} := \beta(v_i, v_j)$. Beispiel [2, S. 112]

Definition 10.3. *$[\beta]_B = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt Matrix von β bezüglich B.*

Lemma 10.1. *Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{n \times n}$ eine beliebige symmetrische Matrix. Dann definiert*

$$(u,v) \mapsto u^\top B v$$

eine symmetrische Bilinearform auf V.

Satz 10.1. *Sei $B' = (v'_1, \ldots, v'_k)$ eine weitere Basis und β eine symmetrische Lilinearform mit Matrizen $A = [\beta]_B$ und $A' = [\beta]_{B'}$. Es sei ferner $S = (s_{ij})$ die Matrix des Basiswechsels von B' nach B, daher $S = [\mathrm{id}]_B^{B'}$ und $\begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} = [v'_i]_B$.*
Dann gilt

$$A' = S^\top A S.$$

Satz 10.2. *Sei $V = \mathbb{R}^n$ der euklidische Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt $< \cdot, \cdot >$. Sei $\beta : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit assoziierter quadratischer Form $Q(v) = \beta(v,v)$. Dann existiert eine Orthonormalbasis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $[\beta]_B$ eine Diagonalmatrix ist, daher*

$$[\beta]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die eindimensionalen Teilräume, die von den Basisvektoren v_i aufgespannt werden, heißen Hauptachsen von β.

Definition 10.4. *Für eine quadratische Form $Q : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt $\{v \in V \mid Q(v) = 1\}$ Quadrik zu Q.*

11 Gauß-Jordan Algorithmus

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

über K. Gesucht sind Lösungen $(x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 11.1. *Das Gleichungssystem 1 heißt homogen, falls $b_i = \cdots = b_m = 0$. Andernfalls heißt es inhomogen.*

Proposition 11.1. *Die Lösungsmenge der linearen Gleichungssystems ändert sich nicht unter den folgenden elementaren Zeilenoperationen:*

1. *Addiere zu einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung*
2. *Tausche zwei Gleichungen*
3. *Multipliziere eine Gleichung mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$*

11.1 Algorithmus

Beispiel [2, S. 23]

1.
   - Falls $a_{11} \neq 0$, subtrahiere das $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$-fache der 1. Gleichung von der n-ten Gleichung.
   - Falls $a_{11} = 0$, so finde $a_{i1} \neq 0$ und vertausche die 1. Gleichung mit der i-ten.
   - Falls kein solches a_{i1} existiert, so tue nichts.
2. Die unteren $m-1$ Gleichungen des modifizierten Gleichungssystems können wie im Schritt 1 behandelt werden.

Nach $m-1$ Schritten hat das entstandene lineare Gleichungssystem die folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} c_{1j_1}xj_1 + \cdots + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{2j_2}xj_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ c_{rj_r}xj_r + c_{rn}x_n &= d_r \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ 0 &= d_m \end{aligned} \tag{2}$$

x_{j_k} nennt man Pivotvariablen. Dabei gilt $\forall k \in \{1, \ldots, r\} : c_{kj_k} \neq 0$ und $j_1 < j_2 \cdots < j_r \leq n$, sowie $0 \leq r \leq m$.

Definition 11.2. *Die Zahl r heißt Rang des Gleichungssystems 2.*

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems bestimmt man wie folgt:

- Falls $d_i \neq 0, i \geq r+1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- Falls $d_i = 0, i \geq r+1$:
  1. Wähle beliebige Werte aus K für jede der $n-r$ Nicht-Pivot-Variablen.
  2. Löse danach die verbleibenden Gleichungen auf.
  3. Die Lösungsmenge enthält genau ein Element, genau dann wenn $r = n$ ist und $d_i = 0, i \geq r+1$.

11.2 Der homogene Fall

Beispiel [2, S. 24]

Im homogenen Fall sind sämtliche $d_k = 0$, und falls $r < n$, so können wir $n-r$ verschiedene Lösungen $b_1, \dots, b_{n-r}$ wie folgt konstruieren:
b_k entsteht wie in Abschnitt 11.1 erläutert, wobei man für die k-te Nicht-Pivotvariable 1 und für die übrigen 0 wählt und anschließend die Werte der Pivotvariablen ausrechnet.

Proposition 11.2. $(b_1, \dots, b_{k-r})$ *ist eine Basis des Lösungsraums.*

11.3 Zeilenoperationen in Matrizendarstellung

Sei $A \in K^{n \times n}$ beliebig. Der Gauß-Jordan-Algorithmus formt A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen zu einer Matrix B in Zeilenstufenform um. Eine Matrix in Zeilenstufenform ist eine obere Dreiecksmatrix. Die elementaren Zeilenoperationen entsprechen der Multiplikation mit Matrizen von links. Die Matrizen der Zeilenoperationen haben dann folgende Darstellung:

1. Addition einer Zeile:

$$L' = E_n + \lambda E_{ij}, i \neq j \text{ mit } \det(L') = 1$$

2. Vertauschung von Zeilen:

$$L' = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i-teZeile, i-teSpalte \\ \\ \\ \\ \leftarrow j-teZeile, j-teSpalte \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\text{mit } \det(L') = -1$$

3. Multiplikation mit einem Skalar:

$$L' = diag(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1), \lambda \neq 0) \text{ mit } \det(L') = \lambda$$

Beispiel [2, S. 59]

Um eine Zeilenstufenform zu erreichen, genügen die Operationen 1 und 2. Daraus folgt $det(A) = det(B) \cdot (-1)^t$, wobei t die Anzahl der Zeilenvertauschungen ist.

Literatur

[1] Peter Furlan. *Das gelbe Rechenbuch*.

[2] Dr. habil. Raymond Hemmecke. *Lineare Algebra für Physiker*. 2008.

[3] Prof. Dr. Otto. *Linear Algebra I*. 2008.

[4] Prof. Dr. Otto. *Linear Algebra II*. 2009.