§7 Diagonalisierung normaler Matrizen

(1) a) Im folgenden ist stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der Standard-euklidische bzw. unitäre Raum.

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

$$A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T} = (\overline{a}_{ji}) \quad \text{Adjungierte von } A.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(A+B)^* = A^* + B^* \qquad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(AB)^* = B^* A^* \qquad A^{**} = A$$

Falls $\forall i,j: a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{A} = A$ und $A^* = A^T$.

b) <u>Def</u>: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) A <u>symmetrisch</u> $:\Leftrightarrow A = A^T$

ii) A <u>schiefsymmetrisch</u> $:\Leftrightarrow A = -A^T$

iii) A <u>hermitesch</u> $:\Leftrightarrow A = A^*$ <u>selbstadjungiert</u>

iv) A <u>schiefhermitesch</u> $:\Leftrightarrow A = -A^*$

<u>Bsp</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 2 & 2+i \\ 1+i & 2-i & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \text{ ist hermitesch.}$$

c) <u>Lemma</u>: Es gilt für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

i) $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + \overline{A})}_{\text{reell}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - \overline{A})}_{\text{imaginär}}$

ii) $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + A^T)}_{\text{symmetrisch}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - A^T)}_{\text{schiefsymmetrisch}}$

iii) $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + A^*)}_{\text{hermitesch}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - A^*)}_{\text{schiefhermitesch}}$

d) <u>Lemma:</u> Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle.$$

<u>Bew:</u> $\langle Av, w \rangle = (Av)^T \overline{w} = v^T A^T \overline{w}$

$= v^T \overline{A^* w} = \langle v, A^* w \rangle$ //

<u>Folgerung:</u> $\langle v, Aw \rangle = \langle v, A^{**} w \rangle = \langle A^* v, w \rangle$.

e) <u>Def:</u> Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt <u>normal</u>, falls gilt $AA^* = A^* A$.

<u>Bsp:</u> i) unitäre Matrizen sind normal

ii) reelle orthogonale Matrizen sind normal

iii) Diagonalmatrizen sind normal

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ist <u>nicht</u> normal,

denn
$$A^* A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = AA^*.$$

v) hermitesche und schiefhermitesche Matrizen sind normal

vi) reelle symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen sind normal

(2) a) Lemma: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal. Dann gilt:

i) $A - \lambda I_n$ ist normal $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

ii) $Q^* A Q$ ist normal $\forall Q \in U_n \mathbb{C}$.

b) Lemma: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt: $\overline{\lambda}$ ist Eigenwert von A^* mit zugehörigem Eigenvektor v.

c) Proposition: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. Insbesondere sind die komplexen EW reeller symmetrischer Matrizen stets reell.

Bew: Sei $A^* = A$ und $v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zum EW λ von A $\Rightarrow Av = \lambda v$

$$\overset{b)}{\Rightarrow} A^* v = \overline{\lambda} v$$
$$\overset{A^*=A}{\Rightarrow} Av = \overline{\lambda} v$$
$$\Rightarrow \lambda v = \overline{\lambda} v$$
$$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}, \text{ d.h. } \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Bem: Komplexe symmetrische Matrizen können nicht-reelle EW haben, z.B. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

d) Satz: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal. Dann sind Eigenvektoren zu verschiedenen EW orthogonal.

Bew: Seien v, w Eigenvektoren zu EW λ bzw. μ.

$\Rightarrow \lambda \langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle \overset{1d)}{=} \langle v, A^* w\rangle \overset{b)}{=} \langle v, \overline{\mu} w\rangle = \mu \langle v, w\rangle$.

Aus $\lambda \neq \mu$ folgt nun $\langle v, w\rangle = 0$. □

(3) a) <u>Satz:</u> Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix.

Äquivalent sind:

i) A ist normal.

ii) $\mathbb{C}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A.

iii) Ex. $Q \in U_n \mathbb{C}$, so dass $Q^{-1} A Q$ eine Diagonalmatrix ist.

b) <u>Satz:</u> Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind äquivalent:

i) A hermitesch

ii) A normal und alle EW reell

iii) $\exists\, Q \in U_n \mathbb{C}$, so dass $Q^{-1} A Q$ eine reelle Diagonalmatrix ist.

c) <u>Satz:</u> Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

i) A symmetrisch

ii) $\mathbb{R}^n$ hat ONB aus Eigenvektoren zu A.

iii) $\exists\, Q \in O_n \mathbb{R}$, so dass $Q^{-1} A Q$ eine (reelle) Diagonalmatrix ist.

d) <u>Satz:</u> Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind äquivalent:

i) A unitär

ii) A normal und alle EW haben Betrag 1.

iii) $\exists\, Q \in U_n \mathbb{C}$, so dass $Q^{-1} A Q$ Diagonalmatrix, deren Einträge alle Betrag 1 haben.

§8 Jordansche Normalform

(1) Sei K ein beliebiger Körper.

a) <u>Def:</u> Ein <u>Jordanblock</u> oder <u>elementare Jordanmatrix</u> ist eine Matrix

$$J_{m,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m \times m}$$

<u>Bsp:</u>

$$J_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_{1,1} = (1)$$

$$J_{3,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{2,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

b) <u>Lemma:</u> Ein Jordanblock $J_{m,\lambda}$ mit $m > 1$ ist nicht diagonalisierbar. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist 1-dimensional.

<u>Bew:</u> $\chi_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m \Rightarrow$ einziger EW von $J_{m,\lambda}$ ist λ, mit alg. Vielfachheit m.

Betrachte das lin. GLS:

$$(J_{m,\lambda} - \lambda I_m)\, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} x = 0.$$

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zum EW } \lambda, \text{ bis auf Vielfache aus } K \text{ eindeutig.} \quad \square$$

c) <u>Lemma:</u> $\mu_{J_{m,\lambda}} = \chi_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$

d) <u>Def:</u> Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ besitzt <u>Jordansche Normalform</u>, falls sie eine Blockdiagonalmatrix aus Jordanblöcken ist:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k,\lambda_k}} \end{pmatrix}$$

(2) Wir betrachten von nun an den Fall $K = \mathbb{C}$:

a) <u>Satz:</u> Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ ein Endomorphismus. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ Jordansche Normalform besitzt.

b) <u>Folgerung:</u> Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform, d.h. ex. $B \in GL_n \mathbb{C}$: $B^{-1}AB$ in Jordanscher Normalform ist.

c) <u>Folgerung:</u> Zwei komplexe Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie (bis auf Umordnung der Jordanblöcke) dieselbe Jordansche Normalform haben.

(3) Sei $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ und λ ein EW von φ.

a) Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V bzgl. der gilt:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m,\lambda}} & 0 \\ 0 & \boxed{\ast} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$(\ast) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(v_1) = \lambda v_1 \\ \varphi(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \\ \vdots \\ \varphi(v_m) = v_{m-1} + \lambda v_m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_1 = 0 \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_2 = v_1 \\ \vdots \\ (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_m = v_{m-1} \end{array} \right.$$

b) <u>Def:</u> Eine Familie $(v_1, \dots, v_m)$ in V heißt <u>Jordankette</u> zum EW λ von φ, falls $v_1 \neq 0$ und $(\ast)$ erfüllt ist.

<u>Lemma:</u> Eine Jordankette zum EW λ von φ ist linear unabhängig.

c) <u>Def:</u> Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt <u>verallgemeinerter Eigenvektor</u> (oder <u>Hauptvektor</u>) von φ, falls ex. $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$(\ast\ast) \quad (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^m v = 0.$$

Das kleinste $m \in \mathbb{N}$, für das (**) gilt, heißt <u>Stufe</u> von v.

d) Sei v ein verallgemeinerter Eigenvektor von φ der Stufe m. Wir setzen

$$v_1 := (\varphi - \lambda \cdot id)^{m-1} v$$
$$v_2 := (\varphi - \lambda \cdot id)^{m-2} v$$
$$\vdots$$
$$v_{m-1} := (\varphi - \lambda \cdot id)\, v$$
$$v_m := v$$

Dann gilt offenbar (*), und $(v_1, \dots, v_m)$ ist eine Jordankette, also lin. unabh. nach b)

$$\Rightarrow m \leq n$$

<u>Def.</u>: $V^\lambda(\varphi) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(\varphi - \lambda \cdot id)^k = \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_m)$

heißt verallgemeinerter Eigenraum von λ.

<u>Satz</u>: Sei $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ mit den paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Dann gilt

$$V = V^{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}(\varphi).$$

<u>Bew</u>: Neeb, LA II, 11.2.10. $\square$

<u>Bem</u>: $\dim V^{\lambda_i}(\varphi) =$ alg. Vielfachheit von λ_i

e) <u>Lemma:</u> Sei $\mathcal{C} = (v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1, v_1^2, \dots, v_{\ell_2}^2, \dots, v_1^s, \dots, v_{\ell_s}^s)$ eine Familie von s Jordanketten zum EW λ von φ, d.h.

$$(\varphi - \lambda \cdot id)\, v_{j+1}^i = v_j^i \quad \text{für } 1 \leq j < \ell_i$$

und

$$(\varphi - \lambda \cdot id)\, v_1^i = 0.$$

Sind die Eigenvektoren $v_1^1, \dots, v_1^s$ lin. unabh., so sind alle Vektoren in $\mathcal{C}$ lin. unabh.

<u>Bew:</u> Sei $\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_j^i = 0$ für $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$.

Ang. es ex. i,j: $\alpha_{ij} \neq 0$.

Wähle $k \in \mathbb{N}$ maximal mit $\alpha_{ik} \neq 0$.

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} (\varphi - \lambda\, id)^{k-1} v_k^i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} v_1^i$$

$$\Rightarrow (v_1^1, \dots, v_1^s) \text{ lin. abh.} \quad ↯$$

$\Box$

f) <u>Lemma:</u> Sei $\mathcal{C}$ wie oben, aber lin. <u>abhängig</u>.

Dann ex. eine Familie $\mathcal{C}'$ von Jordanketten mit $\operatorname{lin}(\mathcal{C}) = \operatorname{lin}(\mathcal{C}')$, die einen Vektor weniger als $\mathcal{C}$ enthält.

<u>Bew:</u> Aus e) folgt, dass die Eigenvektoren $(v_1^1, \dots, v_1^s)$ lin. abh. sind. D.h. ex. $\alpha_i \in \mathbb{C}$, (nicht alle $= 0$), mit $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_1^i = 0$.

Sei $j \in \{1, \dots, s\}$, so dass l_j minimal ist unter allen l_i mit $\alpha_i \neq 0$. O.B.d.A. $j = 1$ und $\alpha_1 \neq 0$.

Fall 1: $l_1 = 1$

$\Rightarrow$ Streiche v_1^1 aus $\mathcal{C}$, um $\mathcal{C}'$ zu erhalten.

Fall 2: $l_1 \geq 2$

Setze $\tilde{v}_j^1 = v_{j+1}^1 + \sum \frac{\alpha_i}{\alpha_1} v_{j+1}^i$ für $1 \leq j \leq l_1 - 1$.

Wegen der Minimalität von l_1, d.h. $l_1 \leq l_i$, ist die Existenz von v_{j+1}^i gesichert.

Nun bilden $(\tilde{v}_1^1, \dots, \tilde{v}_{l_1-1}^1)$ eine Jordankette mit $\text{Lin}(\tilde{v}_1^1, \dots, \tilde{v}_{l_1-1}^1) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_l)$. $\square$

g) Satz: Für jeden EW λ von φ besitzt der verallgemeinerte Eigenraum $V^\lambda(\varphi)$ eine Jordanbasis.

Bew: Folgt aus f). $\square$

(4) Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$.

a) Verfahren zur Bestimmung einer Jordanbasis von V bzgl. φ, d.h. einer Basis $\mathcal{J}$ von V, so dass $[\varphi]_{\mathcal{J}}$ Jordansche Normalform besitzt.

i) Bestimme Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von φ mit ihren alg. Vielfachheiten $l_1, \dots, l_k$.

$[\Rightarrow l_1 + \dots + l_k = n]$

ii) Für jeden EW λ_i: Bestimme Basis des verallgemeinerten Eigenraums $V^{\lambda_i}(\varphi)$.
Dazu löst man schrittweise die lin. GLS

$$(\varphi - \lambda_i \cdot id)^j v = 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots$$

bis man l_i linear unabh. Lösungen gefunden hat.

iii) Bilde Jordanketten und verkürze sie schrittweise durch Anwendung von Lemma f), bis man eine Basis erhält.

iv) Matrix des Basiswechsels besitzt als Spalten verallgemeinerte Eigenvektoren (kettenweise aufsteigend!)

b) Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

i) $\chi_A(t) = (1-t)^5$, d.h. 1 ist der einzige EW, und er hat die alg. Vielfachheit 5.

$$\Rightarrow \mathbb{C}^5 = V^1(A).$$

ii) Wähle als Basis von $\mathbb{C}^5 = V^1(A)$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $(A - I_5)v_1 = w$ und $(A - I_5)v_2 = -w$ für

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor.

Außerdem gilt $(A-I_5)v_3 = (A-I_5)v_4 = v_5$ und $(A-I_5)v_5 = 0$.

iii) • Die von v_1 bzw. v_2 beginnenden Jordanketten sind linear abhängig.

Setze $\tilde{v}_1 := v_1 + \frac{1}{1} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow (A-I_5)\tilde{v}_1 = 0$, d.h. $\tilde{v}_1$ ist Eigenvektor.

• Die von v_3 und v_4 beginnenden Jordanketten sind ebenfalls lin. abh.:

Setze $\tilde{v}_3 := v_3 - \frac{1}{1} v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor.

• Wir haben jetzt folgendes System von Jordanketten:

$\tilde{v}_1, \; v_2 \to -w, \; \tilde{v}_3, \; v_4 \to v_5$

Es gilt: $-w - v_5 - \frac{1}{2}\tilde{v}_3 + \frac{1}{2}\tilde{v}_1 = 0$.

Dann stellt sich heraus, dass

$(-w, v_2, v_5, v_4, \tilde{v}_3)$ lin. unabh. ist.

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $S^{-1}AS = J_{2,1} \oplus J_{2,1} \oplus J_{1,1}$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

§9 Quadratische Formen

(1) Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.

a) <u>Def:</u> Eine Abb. $Q: V \to \mathbb{R}$ heißt <u>quadratische Form</u>, falls gilt

i) $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

ii) $\beta_Q : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto \frac{1}{2}[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)]$

ist eine (symmetrische) Bilinearform.

b) <u>Bsp:</u> Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beliebige symmetrische Bilinearformen (z. B. das euklidische Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$). Dann ist

$$Q : V \to \mathbb{R} : v \longmapsto \beta(v,v)$$

eine quadratische Form.

<u>Bew:</u> i) $Q(\lambda v) = \beta(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \beta(v,v) = \lambda^2 Q(v)$

ii) nachrechnen

$\square$

<u>Def:</u> Q heißt die zu β <u>assoziierte</u> quadratische Form

c) <u>Bem:</u> Die aus a) und b) resultierende Entsprechung zwischen quadr. Formen und symm. Bilinearformen gilt allgemein über beliebigen Körpern, in denen $1+1 \neq 0$ gilt.

(2) Sei nun $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis.

a) Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symm. Bilinearform.
Definiere $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i,j \leq n$ durch
$$\beta_{ij} := \beta(v_i, v_j).$$
<u>Def:</u> $[\beta]_{\mathcal{B}} = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt <u>Matrix von β</u> bzgl. $\mathcal{B}$.

stets symmetrisch

b) <u>Bsp:</u> Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ das euklidische Skalarprodukt auf V und $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:
$$[\langle \cdot , \cdot \rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$
(Da $\mathcal{B}$ ONB für $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ist.)

c) Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine bel. symm. Matrix. Dann definiert
$$(u, v) \longmapsto u^T B v$$
eine symm. Bilinearform auf V.

d) Sei $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ eine weitere Basis und β eine symm. Bilinearform mit Matrizen $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$ und $A' = [\beta]_{\mathcal{B}'}$.
Es sei ferner $S = (s_{ij})$ die Matrix der

Basiswechsels von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$, d.h.

$S = [id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ und $\begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} = [v_i']_{\mathcal{B}}$;

vgl. §3.11.

<u>Satz:</u> $A' = S^T A S$.

<u>Bsp:</u> $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{B}' = (e_1+e_2, e_1-e_2)$

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\beta]_{\mathcal{B}'} = S^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) Sei $V = \mathbb{R}^n$ der euklidische VR mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

a) <u>Satz:</u> Sei $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ symm. Bilinearform mit assoziierter quadr. Form $Q(v) = \beta(v,v)$. Dann ex. eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist, d.h.

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die eindimensionalen Teilräume, die von den Basisvektoren v_i aufgespannt werden, heißen <u>Hauptachsen</u> von β.

<u>Bew:</u> Sei $A = [\beta]_{(e_1, \dots, e_n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Da A symm. ist, ex. nach 7.3 c) ein ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.

Die Transformationsmatrix Q ist orthogonal.

Sei $A' = [\beta]_{\mathcal{B}} \underset{2d)}{\Longrightarrow} A' = Q^T A Q \underset{\substack{\uparrow \\ Q \text{ orthogonal}}}{=} Q^{-1} A Q$

hat Diagonalform.

<u>Bem</u>: Ein solcher Basiswechsel heißt <u>Hauptachsentransformation</u>.

b) <u>Def</u>: Für eine quadr. Form $Q: V \to \mathbb{R}$ heißt $\{x \in V \mid Q(v) = 1\}$ die <u>Quadrik</u> zu Q.