§6 Eigenwerte und Eigenvektoren

(1) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR und $\varphi : V \to V$ ein $\mathbb{K}$-linearer Endomorphismus.

a) Def.: • Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von φ, falls ex. $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $\varphi(v) = \lambda \cdot v$.
Jeder von 0 verschiedene Vektor w, für den gilt $\varphi(w) = \lambda \cdot w$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.
Der Unterraum

$$V_\lambda := V_\lambda(\varphi) := \ker(\varphi - \lambda \cdot id_V)$$
$$= \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ bzgl. φ.
Die Dimension $d_\lambda := \dim V_\lambda \geq 1$ heißt geometrische Vielfachheit von λ.

• Eine lineare Abb. φ heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren (zu verschiedenen Eigenwerten) besteht. [D.h. die zugehörige Matrix von φ bzgl. dieser Basis ist eine Diagonalmatrix.]

Bem: Eigenwerte linearer Abb. treten in der Physik auf als Eigenfrequenzen schwingfähiger Systeme.

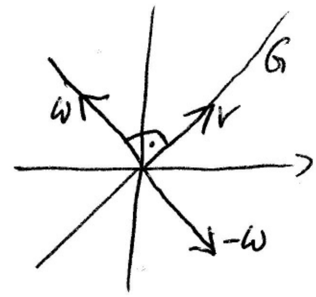
b) Bsp.: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und G eine Gerade durch 0. Wähle Orthogonalbasis (v, w) von V, so dass $\mathrm{Lin}(v) = G$.

i) Sei σ die orthogonale Spiegelung an G; d.h. $\sigma(v) = v$ und $\sigma(w) = -w$.

$$\Rightarrow \begin{cases} v & \text{Eigenvektor zum EW } 1 \\ w & \text{Eigenvektor zum EW } -1 \end{cases}$$

und

$$[\sigma]_{(v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ diagonalisierbar.}$$

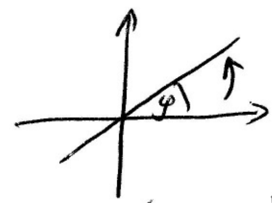


ii) Sei π die orthogonale Projektion auf G; d.h. $\pi(v) = v$ und $\pi(w) = 0$.

$$\Rightarrow [\pi]_{(v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ diagonalisierbar}$$

c) Bsp: Sei $\varphi \in (0, \pi)$ und ϱ die Drehung in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ; d.h.

$$[\varrho] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Dann besitzt φ keinen Eigenwert (in $\mathbb{R}$).

⌈Angenommen φ hat EW λ:

$$\underset{\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Weil $(x_1, x_2) \neq 0$, folgt, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\varphi-\lambda)^2 + \sin^2\varphi$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$$

$$\Longrightarrow \cos\varphi = \pm 1 \quad ⚡ \quad \pi \in (0,\pi)$$

┘

d) Bem: Es gilt

i) λ Eigenwert von $\varphi \Longleftrightarrow \exists v \neq 0 : (\varphi - \lambda \cdot id)(v) = 0$

$\Longleftrightarrow \ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq \{0\}$

ii) v Eigenvektor von φ bzgl. EW λ

$\Longleftrightarrow v \neq 0$ & $(\varphi - \lambda \cdot id)(v) = 0$

$\Longleftrightarrow v \in \ker(\varphi - \lambda \cdot id) \setminus \{0\}$

charakteristische Gleichung

e) Satz: Sei $\varphi \in End(V)$ [und $\dim_K V < \infty$]

Es gilt λ EW von $\varphi \Longleftrightarrow \det(\varphi - \lambda \cdot id) = 0$.

Bew: λ ist kein EW von φ

$\Longleftrightarrow \ker(\varphi - \lambda \cdot id) = \{0\}$

$\Longleftrightarrow \varphi - \lambda \cdot id$ injektiv

$\Longleftrightarrow \varphi - \lambda \cdot id$ bijektiv $\underset{\substack{4.6.d) \\ 4.6.e)}}{\Longleftrightarrow} \det(\varphi - \lambda \cdot id) = 0$ □

φ Endo, $\dim V < \infty$

f) <u>Def:</u> Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann heißt $\lambda \in K$ <u>Eigenwert</u> von M, falls λ Eigenwert von

$$\varphi_M : K^n \to K^n$$

ist. Analog für die Eigenvektoren.

g) <u>Bsp:</u> i) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. A hat keinen EW in $\mathbb{R}$ [es gilt $A = [\varphi]$ für $\gamma = \pi/2$ in Bsp c].

ii) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = i \text{ oder } \lambda = -i$$

Lösen der linearen GLS

$$(A - iI_n)v = 0 \text{ bzw. } (A + iI_n)v = 0$$

führt zu den Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (\text{zum EW } i)$$

und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (\text{zum EW } -i).$$

Die Vektoren (v_1, v_2) bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ und A ist diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$), d.h. in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

ÜA Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit reellen Einträgen. Falls v Eigenvektor zum EW λ, dann ist auch $\bar{v}$ Eigenvektor zum EW $\bar{\lambda}$.

(2) Sei V endlich-dim. K-VR und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

a) <u>Satz</u>: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ und $v_1, \dots, v_r$ zugehörige Eigenvektoren. Dann ist $(v_1, \dots, v_r)$ lin. unabhängig.

<u>Bew</u>: per Induktion nach r $\rightsquigarrow$ ÜA. //

<u>Folgerung</u>: Falls φ sogar $n = \dim_K V$ verschiedene EW hat, so ist φ auch diagonalisierbar.

b) <u>Bem</u>: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ verschiedene EW von φ mit den geometrischen Vielfachheiten $d_1, \dots, d_r$. Sei $(b_{i1}, \dots, b_{id_i})$ eine Basis des Eigenraums V_{λ_i}.

Dann ist
$\mathcal{B} = (b_{11}, \dots, b_{1d_1}, \dots, b_{r1}, \dots b_{rd_r})$
eine Basis von $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$. Falls gilt $d_1 + \dots + d_r = n$, dann gilt $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} = V$ und φ ist diagonalisierbar:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix}} \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, d_1 \\ \\ \\ \}\, d_r \end{array} \end{array}$$

(3) Sei K ein Körper.

a) <u>Def</u>: Eine Funktion $a: \mathbb{N} \to K: n \mapsto a_n$ mit der Eigenschaft, dass $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N$: $a_n = 0$ heißt <u>Polynom</u> mit Koeffizienten in K.

<u>Notation</u>: Wir schreiben solch eine Funktion

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, \dots)$$

als $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N$, wobei das Symbol t eine <u>Unbestimmte</u> und <u>kein</u> Element aus K ist.

$K[t] = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N \mid a_i \in K, N \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Polynome mit Koeff. in K in der Unbestimmten t.

b) <u>Proposition</u>: Mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Skalarmultiplikation ist $K[t]$ ein K-VR mit Basis $(1, t, t^2, \dots)$. Insbesondere ist $K[t]$ ein unendlich-dim. K-VR.

<u>Def</u>: Zusätzlich kann man eine <u>Polynommultiplikation</u> definieren:

$$(a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N) \cdot (b_0 + b_1 t + \dots + b_M t^M)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + \dots + \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big) t^k$$
$$+ \dots + a_N b_M t^{N+M}$$

<u>Satz</u>: $(K[t], +, \cdot)$ ist eine <u>kommutative K-Algebra</u>,

d.h.
- $(K[t], +, \underset{\text{skalar}}{\cdot})$ ist ein K-VR
- $(K[t], +, \underset{\text{Polynommult.}}{\cdot})$ ist ein <u>kommutativer Ring</u>
- es gibt ein multiplikatives Neutralelement: 1
- es gilt $(\lambda \cdot a) \cdot b = \lambda (a \cdot b)$ $\forall \lambda \in K, a, b \in K[t]$.

Bem: Ein weiteres Bsp. für eine K-Algebra ist $K^{n\times n}$.

c) **Def:** Sei $a: \mathbb{N} \to K : n \mapsto a_n$ ein Polynom.

Falls $a = 0$, setze $\deg(a) = -\infty$.

Für $a \neq 0$ sei $\deg(a) := \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N : a_n = 0\}$.

Die Zahl $\deg(a) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ heißt **Grad** von a.

Lemma: Seien $a, b \in K[t]$. Dann gilt

i) $\deg(a+b) \leq \max(\deg(a), \deg(b))$

ii) $\deg(a \cdot b) = \deg(a) + \deg(b)$.

Folgerung: $a, b \in K[t] \setminus \{0\} \Rightarrow a \cdot b \neq 0$,

d.h., der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrei.

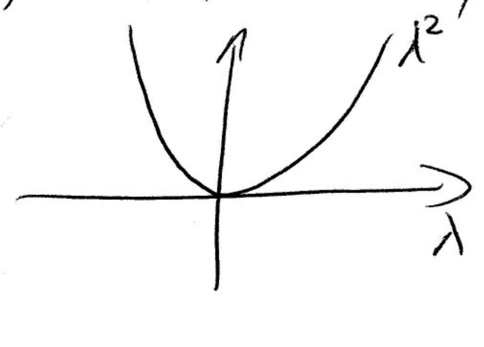
Bem: Man kann auch eine Polynomdivision (mit Rest) definieren. $\longrightarrow$ ÜA

d) **Def:** Zu einem Polynom $a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in K[t]$ kann man die **Auswertungsabbildung**

$$\tilde{a} : K \to K : \lambda \mapsto a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n$$

betrachten [auch: **Polynomfunktion** zu a]

Bsp: i) $K = \mathbb{R}$, $a = t^2$, $\tilde{a} = (\lambda \mapsto \lambda^2)$



Normalparabel

ii) $K = \mathbb{F}_2$, $a = t^2$, $\tilde{a} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto 1 \end{array} \right\}$,

$b = t$, $\tilde{b} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto 1 \end{array} \right\}$,

d.h. $\tilde{a} = \tilde{b}$, obwohl $a \neq b$.

Bem: Man kann auch Auswertungsabb. in anderen K-Algebren betrachten!

Def: Die Zahl $\lambda \in K$ heißt Nullstelle von $a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in K[t]$, falls gilt $\tilde{a}(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_N \lambda^N = 0$.

Proposition: Ist $a \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$ mit einer Nullstelle $\lambda \in K$, so ex. eindeutig bestimmtes Polynom $b \in K[t]$ mit $\deg b = d-1$ und $a = (t - \lambda) \cdot b$.

Bew: ÜA

Bem: Offenbar gilt auch die Umkehrung: Falls $a = (t-\lambda) \cdot b$, dann ist λ Nullstelle von a.

Folgerung: Ein Polynom in $K[t]$ vom Grad d hat höchstens d Nullstellen in K.

Def: Seien $a \in K[t]$ und $\lambda \in K$, so dass $a = (t-\lambda)^s \cdot b$ für $s \geq 1$ und $b \in K[t]$ mit $\tilde{b}(\lambda) \neq 0$. Dann heißt s die Vielfachheit der Nullstelle λ von a, und λ heißt s-fache Nullstelle von a.

Bem: i) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen des Polynoms $a \in K[t]$ und Vielfachheiten $s_1, \dots, s_r$. Dann ex. eindeutig ein Polynom $b \in K[t]$ ohne Nullstellen, so dass

$$a = (t-\lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)^{s_r} \cdot b$$

ii) [Fundamentalsatz der Algebra]

Jedes Polynom $a \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg a \geq 1$ besitzt eine Nullstelle (d.h. der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen).

(4) Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

a) Def: Die Determinante

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot I_n) \in K[t]$$

heißt charakteristisches Polynom von A

Bsp i) [vgl. Bsp 1c] $K = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \qquad \gamma \in (0, \pi)$$

$$\chi_A = \det(A - t \cdot I_n) = \begin{vmatrix} \cos\gamma - t & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - t \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2\gamma - 2\cos\gamma\, t + t^2 + \sin^2\gamma$$

$$= 1 - 2\cos\gamma\, t + t^2$$

ii) K beliebig, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{vmatrix}$$

$$= t^2 - (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= t^2 - \underbrace{(\operatorname{tr} A)}_{} t + \det A$$

<u>Spur</u> von A := Summe der Diagonalelemente

<u>Satz:</u> $\chi_A(t) \in K[t]$ ist ein Polynom vom Grad n. Es gilt

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\operatorname{tr} A) t^{n-1} + \ldots + \det A$$

<u>Bew:</u> Aus der Leibnizformel (4.7) folgt

$$\chi_A(t) = (a_{11} - t) \cdot (a_{22} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t)$$

+ Produkte, in denen höchstens $n-2$ Faktoren $(a_{ii} - t)$ auftreten

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\operatorname{tr} A) t^{n-1} +$$

+ Terme niedrigeren Grades //

<u>Bem:</u> Wir hatten die Leibnizformel (und andere Eigenschaften der Determinante) nur für Matrizen mit Einträgen aus einem Körper bewiesen. Der Ring $K[t]$ ist (nach 3c) aber nullteilerfrei und daher ist $K[t]$ in seinen <u>Quotientenkörper</u> $K(t)$ einbettbar. Daher gelten alle Aussagen über Determinanten von Matrizen mit Koeffizienten in $K[t]$ entsprechend.

b) Bem: Aus 1, d) folgt:

$$\boxed{\text{Die Eigenwerte von } A \text{ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms } \chi_A.}$$

Da $\deg \chi_A = n$, folgt (erneut), dass A höchstens n Eigenwerte hat.

c) Def: Sei λ Eigenwert von A. Dann heißt die Vielfachheit der Nullstelle λ in $\chi_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ.

Proposition: Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit d_λ stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Bew: (uA)

Bsp: $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2$$

$\Rightarrow$ 1 ist einziger EW von A (mit der alg. Vielfachheit 2).

Um die Eigenvektoren von A zum EW 1 zu bestimmen, betrachten wir das lineare GLS

$$(A - 1 \cdot I_n)v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow v \in \operatorname{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_1 = 1.$$

D.h. es kommt vor, dass die geom. Vielfachheit echt kleiner ist als die alg. Vielfachheit.

d) <u>Satz</u>: Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar über K genau dann, wenn $\chi_A \in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)^{e_r},$$

und falls für jeden EW λ_i die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen übereinstimmt.

<u>Bew</u>: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen EW von A. Ist A diagonalisierbar und sind $d_1, \ldots, d_r$ die geometrischen Vielfachheiten der EW, so ex. $S \in GL_n K$, so dass

$$A' := S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} \Big\} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix}} \Big\} d_r \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Spalten von S Eigenvektoren zu den jeweils entsprechenden EW.

$$\Rightarrow \chi_A(t) = \det(A - tI_n) = \det(S^{-1}AS - tI_n)$$
$$= \det(S(A' - tI_n)S^{-1}) = \det(A' - tI_n)$$
$$= \chi_{A'}(t) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - t)^{d_i}$$

$$\boxed{\text{Ähnliche Matrizen haben dasselbe char. Polynom.}}$$

Es gilt $d_i = e_i \ \forall i$.

Umgekehrt zerfällt $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdots (\lambda_r - t)^{e_r}$ in Linearfaktoren und $e_i = d_i \ \forall i$.

$\Rightarrow n = \deg \chi_A = e_1 + \ldots + e_r = d_1 + \ldots + d_r$

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar. □

26)

<u>Folgerung</u>: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden EW $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die geom. und die alg. Vielfachheit übereinstimmen.

<u>Bew</u>: χ_A zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. □

<u>Folgerung</u>: Jede komplexe Matrix hat einen EW.

(5) a) Unter 3d) hatten wir einem Polynom
$$a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in K[t]$$
die Auswertungsabb.
$$\tilde{a} : K \to K : \lambda \mapsto a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_N \lambda^N$$
zugeordnet.

Jetzt betrachten wir eine zweite Auswertungsabb.

$$\tilde{\hat{a}} : K^{n\times n} \to K^{n\times n} : M \mapsto a_0 I_n + a_1 M + \ldots + a_N M^N.$$

Bem: i) Die Abb. $\phi_M : K[t] \to K^{n\times n} ; a \mapsto \tilde{\hat{a}}(M)$ ist ein K-Algebra-Homomorphismus.

ii) Man kann ebenso eine Auswertungsabb. in $\mathrm{End}_K V$ betrachten für bel. K-VR V.

b) **Bsp:** $a = t^2 - 2t + 1 \in \mathbb{R}[t]$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (t-1)^2$

$$\tilde{\hat{a}}(M) = (M - I_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bem: • Der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrei, aber der Ring $K^{n\times n}$ ist dies nicht (für $n \geq 2$).

• Es gilt $\forall \lambda \in K$:

$$\tilde{\hat{a}}(\lambda I_n) = \hat{a}(\lambda) I_n.$$

D.h. falls λ Nullstelle von a, so gilt

$$\tilde{\hat{a}}(\lambda I_n) = 0.$$

c) **Satz** (Cayley-Hamilton)

Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann gilt $\tilde{\hat{\chi}}_M(M) = 0$.

d) **Wdh** Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. In (4.5) wurde gezeigt, dass

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ wobei}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{ij} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} a_{11} \;\cdots & \cdots\; a_{1n} \\ \hline \vdots & \ddots \\ a_{n1} \;\cdots & \cdots\; a_{nn} \end{array}\right)}_{K^{(n-1)\times(n-1)}}$$

Setze $a'_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

<u>Def:</u> Die Matrix

$$\operatorname{adj}(A) := \left(a'_{ij}\right)_{ij} \in K^{n\times n}$$

heißt <u>Adjungierte</u> von A

<u>Satz:</u> $(\operatorname{adj} A)^T A = (\det(A)) \cdot I_n$.

e) <u>Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton:</u>

- Es gilt

  $$(*) \quad \operatorname{adj}(A - tI_n)^T \cdot (A - t \cdot I_n) \overset{d)}{=} \det(A - tI_n) \cdot I_n$$

- Die Koeffizienten (aus $K[t]$) der Matrix $\operatorname{adj}(A - tI_n)$ sind Polynome in t vom Grad $\leq n-1$.

  D.h. es existieren Matrizen $B_0, \ldots, B_{n-1} \in K^{n\times n}$, so dass

  $$\operatorname{adj}(A - t \cdot I_n)^T = B_0 + B_1 t + \ldots + B_{n-1} t^{n-1}.$$

- Dieses Polynom mit Koeffizienten in $K^{n\times n}$ setzen wir in $(*)$ ein; per Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$
(**)\quad \begin{cases} B_0 A & = a_0 I_n \\ B_1 A - B_0 & = a_1 I_n \\ B_2 A - B_1 & = a_2 I_n \\ \vdots & \vdots \\ B_{n-1} A - B_{n-2} & = a_{n-1} I_n \\ \phantom{B_{n-1}A} - B_{n-1} & = (-1)^n I_n, \end{cases}
$$

wobei $\chi_A = \det(A - tI_n) = a_0 + a_1 t + \ldots + (-1)^n t^n$

Multiplizieren der ersten Gleichung in $(**)$ mit I_n, der zweiten mit A, usw., der $(n+1)$-ten mit A^n ergibt

$$
0 = \widetilde{\chi}_A(A)
$$

$\square$

f) <u>Satz/Def.</u>: Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ex. genau ein Polynom μ_A minimalen Grades mit Leitkoeffizient 1, für das gilt

$$
\widetilde{\mu}_A = 0.
$$

Das Polynom $\mu_A \in K[t]$ heißt <u>Minimalpolynom</u> von A.

<u>Bew</u>: Nach e) gilt $\widetilde{\chi}_A(A) = 0$ und χ_A hat den Leitkoeffizienten $(-1)^n$. Also ex. ein Polynom mit Leitkoeffizient 1, das A annulliert. Hieraus folgt dann die Existenz eines Polynoms mit denselben Eigenschaften und minimalen Grades.

Ang. es ex. zwei Polynome $\mu, \nu \in K[t]$ mit

$\mu = \mu_0 + \mu_1 t + \ldots + t^d$ und $\nu = \nu_0 + \nu_1 t + \ldots + t^d$,

d minimal, mit

$\hat{\tilde{\mu}}(A) = 0 = \hat{\tilde{\nu}}(A) \Rightarrow \widetilde{(\mu - \nu)}(A) = 0$

und $\deg \mu - \nu < d$ $\lightning$ zur Minimalität von d.

$\square$

Bem: Die Existenz annullierender Polynome zu linearen Abb. ist nur in endlich-dim. VR gesichert.

g) Satz: Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom.

Satz: Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen.

Bew: ÜA

h) Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_A = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)^3$

$\Rightarrow \deg \mu_A \leq 3 \Rightarrow \mu_A \in \{t-2, (t-2)^2\}$

$\widetilde{(t-2)}(A) = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$\widetilde{(t-2)^2}(A) = (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu_A = (t-2)^2$.