Lineare Algebra für Physiker I

Gliederung

I. Vektorräume

- Gruppen, (Ringe), Körper
- Beispiele für Vektorräume
- Dimensionsbegriff (lineare (Un)abhängigkeit)

II. Skalarprodukte

- euklidischer + unitärer Vektorraum
- orthogonale Projektion
- elementarste Quantenmechanik

III. Lineare Abbildungen

- Matrizen
- Transformationsgruppen
- System linearer Gleichungen

0. Motivation

(1) Notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — Menge der natürlichen Zahlen

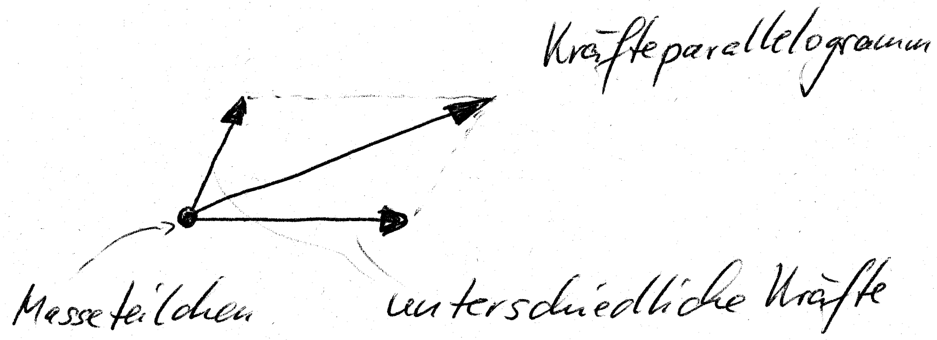
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ — ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$ — rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ — reelle Zahlen
z.B. $3, -3, \pi, e, \sqrt{5}, \ldots$

$\mathbb{C}$ — komplexe Zahlen
z.B. $-14, \pi + 7i$

(2) Vektorrechnung



Addition
Subtraktion
Skalarmult.

(3) $\boxed{\text{Vektorräume}}$

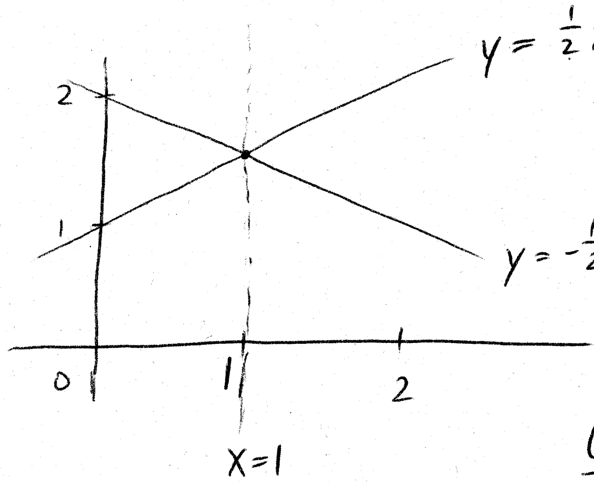
- math. Konzeption zur Grundlegung der Vektorrechnung
- zwei Abstraktionsrichtungen
  - beliebig viele Dimensionen, nicht nur 1, 2, 3; sogar ∞-dimensional
  - beliebige Körper als Koordinatenbereiche
    Verallg. von $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

  (z.B. für Kodierungstheorie oder Kryptographie)

(4) $\boxed{\text{Skalarprodukte}}$

- zusätzlich zur Vektorrechnung: <u>Winkel</u> zwischen Vektoren und <u>Vektorlängen</u>
- dadurch: Grundlegung der Elementargeometrie

(5) $\boxed{\text{Lineare Gleichungssysteme}}$



$y = \frac{1}{2}x + 1 \iff 2y = x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2 \iff 2y = 4 - x$

<u>Gesucht</u>: Menge aller Lösungen (x,y) für das lin. GLS

über welcher Grundgesamtheit?

$$\begin{cases} 2y = x + 2 \\ 2y = 4 - x \end{cases}$$

Elimination von y:

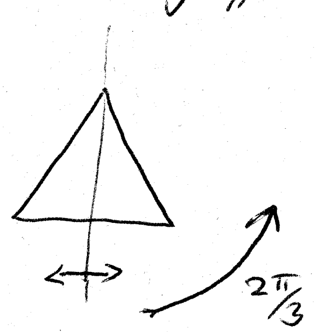
$$4 - x = x + 2 \iff 2 = 2x \iff \underline{\underline{1 = x}}$$

Setze x ein:

$$2y = 1 + 2 = 3 \iff y = 3/2$$

$$\Rightarrow (x,y) = (1, 3/2)$$

(6) Symmetriebegriff



Transformationen (Gruppenbegriff)

A. Exkurs: Quantoren und Aussagenlogik

(1) Die (Aussagen-) Logik handelt von mathematischen <u>Aussagen</u>, die nach gewissen Regeln aus einer gewissen Menge von Symbolen gebildet werden. Eine wohlgeformte Aussage hat entweder den <u>Wahrheitswert</u> "wahr" oder "falsch".

<u>Bsp</u> Aussagen:

"$0 \in \mathbb{Z}$", bzw 'O ist eine ganze Zahl"

"$2+2=5$"

"$a+a=2a$ gilt für alle natürlichen Zahlen a."

<u>Bem</u> Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, hängt vom axiomatischen Kontext ab.

(2) Aus bereits vorhandenen Aussagen A, B lassen sich wie folgt neue Aussagen bilden:

$\neg A$ ist wahr genau dann, wenn A falsch ist, lies "nicht A"; <u>Negation</u>

$A \wedge B$ ist wahr gdw. A und B beide wahr sind, lies "A und B"; <u>Konjunktion</u>

$A \vee B$ ist wahr gdw. mindestens A oder B wahr ist, lies "A oder B"; <u>Disjunktion</u>

$A \Rightarrow B$ ist definiert als $(\neg A) \vee B$, lies "aus A folgt B"; <u>Subjunktion</u>

$A \Leftrightarrow B$ ist wahl gdw. die Wahrheitswerte von A und B gleich sind (d.h. beide wahr oder beide falsch). lies "A ist äquivalent zu B"; <u>Äquivalenz</u>

Diese Konstruktionen neuer Aussagen aus bestehenden lässt sich durch die folgende Wahrheitstafel zusammenfassen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

(3) Durch Inspektion aller möglichen Wahrheitsbelegungen lassen sich die folgenden Sätze der Aussagenlogik beweisen: ← Tautologien

a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ — De Morganschen Regeln

c) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ — Kommutativität

d) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ — Assoziativität

e) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — Distributivgesetze
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(4) Zusätzlich gelten die Regeln des logischen Schließens, die man ebenfalls durch Inspektion der Wahrheitstafel verifizieren kann:

a) $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ — direkter Schluss

b) $[(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow \neg A$ — indirekter Schluss

Beweis:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)$	$\neg A$	$[(\neg B) \wedge (A \wedge B)] \Rightarrow \neg A$
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	W	f	w	w
f	f	w	W	w	w	w

$\square$

c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition

(5) Bsp:

a) $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [\neg A \vee (B \vee C)]$

$$\Leftrightarrow [(\neg A \vee B) \vee C]$$

$$\Leftrightarrow [\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow C]$$

$$\Leftrightarrow [(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C]$$

b) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\underbrace{p \cdot q = 0}_{A} \quad \underset{\Rightarrow}{\Rightarrow} \quad \underbrace{p = 0}_{B} \quad \underset{\vee}{\text{oder}} \quad \underbrace{q = 0}_{C}$$

Bew: Angenommen $\underbrace{p \cdot q = 0}_{A} \underset{\wedge}{\text{und}} \underbrace{p \neq 0}_{\neg B} \quad \underset{\Rightarrow}{\overset{\text{z.z.}}{\Longrightarrow}} \quad \underbrace{q = 0}_{C}$

$$\Rightarrow q = 1 \cdot q = \left(\tfrac{1}{p} \cdot p\right) q = \tfrac{1}{p} \cdot (p q) = \tfrac{1}{p} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{q = 0}_{C}$$

$\square$

(6) Quantoren

Sei J eine Menge und $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie von Aussagen.

Def: a) $(\forall j\in J)\, p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn die Aussage p_j wahr ist für jedes $j\in J$.

Lies: "für alle $j\in J$" **Allquantor**

b) $(\exists j\in J)\, p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn es (mindestens) ein $j\in J$ gibt, so dass p_j wahr ist.

Lies: "es existiert ein $j\in J$" **Existenzquantor**

c) $(\exists! j\in J)\, p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn es genau ein $j\in J$ gibt, so dass p_j wahr ist (d.h. für alle anderen $j\in J\setminus\{j\}$ ist p_j falsch).

Quantor zur eindeutigen Existenz

Bsp: $[\forall q\in\mathbb{Q}\ \exists r\in\mathbb{Q} : 2r=q]$ ist wahr

$[\exists n\in\mathbb{N} : n^2=5]$ ist falsch

I Vektorräume

§1 Gruppen, Ringe, Körper

(1) Def: Eine (binäre) Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung $*: M \times M \to M$: $(m, m') \mapsto m * m'$.

Bem: Je nach Verknüpfung $*$ sind unterschiedliche Schreibweisen für das Bild $m * m'$ unter $*$ üblich.

Bsp: a) $M = \mathbb{Z}$, $* = +$ Addition

b) $M = \mathbb{R}$, $* = \cdot$ Multiplikation

Def: Zu einer Menge M bezeichnet $\mathcal{P}(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M.

Bsp: c) Für $M', M'' \subseteq M$ sei $M' - M'' = \{m \mid m \in M', m \notin M''\}$ die Differenzmenge

Die Abbildung
$$- : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$$
$$(M', M'') \mapsto M' - M''$$
ist eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$.

Def: Seien A, B beliebige Mengen. Dann bezeichnet $A^B = \{f \mid f: B \to A\}$ die Menge aller Abbildungen von B nach A.

Bsp: d) Sei nun M wieder eine beliebige Menge. Die Verkettung von Abbildungen von M in sich ist definiert durch $\circ : M^M \times M^M \to M^M$ mit
$$f \circ g : M \to M, \; m \mapsto g(f(m)).$$

(2) Def: Eine Verknüpfung $*: M \times M \to M$ heißt

- kommutativ, falls für alle $m, m' \in M$ gilt: $m * m' = m' * m$.
- assoziativ, falls für alle $m, m', m'' \in M$ gilt: $(m * m') * m'' = m * (m' * m'')$

In diesem Fall ist es nicht nötig, Klammern zu setzen, und das Paar $(M, *)$ heißt Halbgruppe.

Proposition: Für eine beliebige Menge M ist das Paar $(M^M, \circ)$ eine Halbgruppe.

Bew: z.z.: Die Verkettung $\circ$ ist assoziativ:

Seien $f, g, h \in M^M$ und $m \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}[(f \circ g) \circ h](m) &= h((f \circ g)(m)) \\ &= h(g(f(m))) \\ &= g \circ h(f(m)) \\ &= [f \circ (g \circ h)](m).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

$\square$

(3) Def: Eine Halbgruppe $(G, *)$ heißt Gruppe, falls gilt:

i) $\exists e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt $e * g = g$, und

ii) zu jedem $g \in G$ $\exists$ ein $h \in G$, so dass $h * g = e$.

Bem: Man kann zeigen, dass in einer Gruppe genau ein Element e mit der Eigenschaft i) existiert. Dies heißt das Neutralelement von G.

Ebenso existiert zu jedem $g \in G$ <u>genau ein</u> $h \in G$ mit der Eigenschaft ii). Dieses Element heißt das zu g <u>Inverse</u> und wird oft mit g^{-1} bezeichnet.

<u>Bsp:</u> a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. Das Neutralelement ist 0, das zu $a \in \mathbb{Z}$ Inverse ist $-a$.

b) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Außerdem ist $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ auch eine Gruppe. In diesem zweiten Fall ist das Neutralelement 1, und das zu $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ Inverse ist $\frac{1}{x}$.

c) Sei E eine Menge mit genau einem Element $e \in E$. Dann ist $(E, *)$ eine Gruppe für $*: (e,e) \mapsto e$. Wir nennen $(E, *)$ eine <u>triviale Gruppe</u>.

d) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Durch die folgende Tafel sei eine Verknüpfung $+: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ definiert:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Dann ist $(\mathbb{F}_2, +)$ eine Gruppe mit dem Neutralelement 0.

e) Sei M eine beliebige Menge und

$$\mathrm{Sym}(M) = \{f \mid f: M \to M \text{ bijektiv}\}.$$

Dann ist $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ eine Gruppe mit dem Neutralelement $\mathrm{id}_M: M \to M,\ m \mapsto m$.

<u>Bew:</u> i) Die Verkettung $\circ$ ist eine Verknüpfung auf $\mathrm{Sym}(M)$, weil die Verkettung von bijektiven Abbildungen bijektiv ist.

ii) Aus Prop. (2) folgt, dass $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ eine Halbgruppe ist.

iii) Sei $f: M \to M$ eine beliebige bijektive Abb., und $m \in M$.

- Es gilt $(\mathrm{id}_M \circ f)(m) = f(\mathrm{id}_M(m)) = f(m)$, also $\mathrm{id}_M \circ f = f$.
- Da f bijektiv ist, existiert die Umkehrabb. $f^{-1}: M \to M$ (und diese ist ebenfalls bijektiv). Es gilt $(f^{-1} \circ f)(m) = f(f^{-1}(m)) = m = \mathrm{id}_M(m)$, also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$.

$\square$

(4) <u>Def.</u> Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+: R \times R \to R$ und $\cdot: R \times R \to R$. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt <u>Ring</u>, falls gilt:

i) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

ii) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

iii) Es ist
$$(a+b)c = ac + bc$$
$$a(b+c) = ab + ac$$
für alle $a, b, c \in R$.

<u>Distributivgesetze</u>

<u>Bsp:</u> a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Ringe.

(5) <u>Def.</u> Ein Ring $(K, +, \cdot)$ mit additivem Neutralelement $0 \in K$ heißt <u>Körper</u>, falls $(K - \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.
Das additive Neutralelement 0 heißt <u>Nullelement</u>, und das multiplikative Neutralelement heißt <u>Einselement</u>.

Bem: Man kann für die lineare Algebra, die Körper wesentlich als Koordinatenbereiche benötigt, weitgehend auf die Kommutativität der Multiplikation verzichten; dies führt zur linearen Algebra über Schiefkörpern

Bsp: a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper

b) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper.

c) Wenn man auf der Menge $\mathbb{F}_2 - \{0\} = \{1\}$ aus Bsp 3d) die triviale Multiplikation $\cdot$ betrachtet, so ist $(\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ ein Körper mit genau zwei Elementen.

Es ist definiert $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

Nachtrag: Anders als zunächst in 1.1.d) definiert, wollen wir die Verkettung zweier Abbildungen $f: A \to B$, $g: B \to C$ nun als

$$g \circ f : A \to C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

definieren.

§ 2 Vektorräume

(1) Def: Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum (oder Vektorraum über K) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer binären Verknüpfung (Addition) $+ : V \times V \to V$ sowie einer Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \to V$, so dass gilt

a) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

b) $\forall v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ gilt:

i) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

ii) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

iv) $1 \cdot v = v$

(2) Bsp: Der Standardvektorraum K^n für $n \in \mathbb{N}$

a) • $K^n = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{n \text{ mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in K \right\}$

• $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ Add. in K

komponentenweise Addition

• $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ Mult. in K

$\lambda, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in K$

Wir verifizieren die Axiome 1.a und 1b:

(1a) Der Nullvektor $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist wegen

$$0 + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 0$$

ein Neutralelement für Vektoraddition

Das zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ additive Inverse ist $-\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

wegen $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Da die Addition in K kommutativ ist, ist auch die Addition in K^n kommutativ.

(1b) Seien $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in K^n$ beliebig mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

i) $$(\lambda+\mu)\cdot v = (\lambda+\mu)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda+\mu)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \mu v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \vdots \\ \mu v_n \end{pmatrix} = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$$

ii), iii), iv) analog beweisbar.

b) Sei M eine beliebige Menge und K ein beliebiger Körper.

Es ist $K^M = \{ f \mid f : M \to K \}$.

Mit der punktweise definierten Addition:

$$f+g : M \to K, \quad m \mapsto f(m) + g(m) \quad \text{Add. in } K$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot f : M \to K, \quad m \mapsto \lambda \cdot f(m) \quad \text{Mult. in } K$$

ist $(K^M, +, \cdot)$ ein Vektorraum.

c) Der Körper $(\mathbb{R},+,\cdot)$ wird ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wenn man die gewöhnlichen arithmetischen Operationen betrachtet, aber als Skalarmultiplikation nur die Multiplikation von rationalen mit reellen Zahlen betrachtet.

(3) Es gelten die folgenden Rechenregeln für einen beliebigen K-Vektorraum $(V,+,\cdot)$:

a) $\overset{\text{Skalar}}{0} \cdot v = \overset{\text{Vektor}}{0}$ für alle $v \in V$

<u>Bew:</u> $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$

$\; \| $

$0 + 0 \cdot v$

$\Rightarrow 0 = 0 \cdot v$ (Add von $-(0 \cdot v)$)

b) $\overset{\text{Skalar}}{\lambda} \cdot \overset{\text{Vektor}}{0} = \overset{\text{Vektor}}{0}$

<u>Bew:</u> (analog zu a):

$0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda(0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$

$\Rightarrow 0 = \lambda \cdot 0$

c) $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = 0$ für alle $\lambda \in K, v \in V$

<u>Bew:</u> Angenommen $\lambda \cdot v = 0$ und $\lambda \neq 0$.

$\Rightarrow v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} 0 \overset{b)}{=} 0$

d) $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$

<u>Bew:</u> $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$

$\Rightarrow (-1) \cdot v = -v$ (da $(-1) \cdot v$ add. Inverses zu v, das mit $-v$ bezeichnet wird)

endliche Familie
oder

(4) Es sei $(v_1, \ldots, v_k)$ ein geordnetes k-Tupel von Vektoren aus einem K-VR V.

a) Ein Vektor $v \in V$ heißt

- <u>Linearkombination</u> von $(v_1, \ldots, v_k)$, falls ex. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, so dass gilt
$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$
- <u>Affinkombination</u> von $(v_1, \ldots, v_k)$, falls ex. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, so dass gilt
$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$
<u>und</u> $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$.

b) <u>Def:</u> Speziell für $K = \mathbb{R}$ (oder allgemeiner einen angeordneten Körper K) heißt eine Affinkomb.
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$
eine <u>Konvexkombination</u>, falls zusätzlich
$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k.$$

c) <u>Def:</u> Das k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ heißt <u>linear unabhängig</u>, falls gilt:
$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in K^k: \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$
Andernfalls heißt $(v_1, \ldots, v_k)$ <u>linear abhängig</u>.

d) <u>Lemma:</u> Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

i) Für jede Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, k\})$ ist auch $(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})$ linear unabhängig.

ii) Jede Teilfamilie $(v_1, \ldots, v_i)$ für $i \leq k$ ist linear unabhängig.

Bew: i) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 v_{\pi(1)} + \ldots + \lambda_k v_{\pi(k)}$$
$$= \lambda_{\pi^{-1}(1)} v_1 + \ldots + \lambda_{\pi^{-1}(k)} v_k \quad \text{(Vertauschung der Summanden)}$$

$\Rightarrow \lambda_{\pi^{-1}(1)} = \ldots = \lambda_{\pi^{-1}(k)} = 0$, da $(v_1, \ldots, v_k)$ lin. unabh.

$\Rightarrow (v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})$ lin. unabh.

ii) Angen. $(v_1, \ldots, v_i)$ wäre lin. abh. für ein $i \leq k$.
Dann ex. $\lambda_1, \ldots, \lambda_i \in K$ und $\lambda_h \neq 0$ für mind. ein $1 \leq h \leq i$, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_k = 0$
mit $\lambda_h \neq 0$

$\Rightarrow (v_1, \ldots, v_k)$ lin. abh. $\Rightarrow$ Wid. zur Vor. //

e) Bsp.

i) Im Standard-K-VR K^n sind die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

ii) V bel. K-VR, $x \in V$, $x \neq 0$

$\Rightarrow (x)$ linear unabh., aber

$\underbrace{(x, x, \ldots, x)}_{k\text{-fach}, k > 0}$ linear abh.

f) Def: Eine unendliche Familie von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist

Bem: Wegen Lemma d) lässt sich der Begriff der linearen (Un-)Abhängigkeit auch auf Mengen (= ungeordnete Tupel) von Vektoren anwenden. Der Nullvektor $0 \in V$ ist lin. abh.

g) <u>Proposition</u>: Für $n \geq 2$ sind $v_1, \ldots, v_n$ genau dann linear abhängig, falls einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

<u>Bew</u>: Gilt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ mit $\lambda_i \neq 0$, so folgt

$$v_i = \sum_{j \neq i} \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} v_j .$$

Ist umgekehrt z.B. $v_1 = \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$, so folgt

$$(-1) \cdot v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n = 0.$$

□

(5) a) Sei V ein K-Vektorraum

<u>Def</u>: Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt <u>Teilraum</u> (oder <u>Unterraum</u>) von V, falls gilt $\forall \lambda, \mu \in K \; \forall u, v \in U$:

$$\lambda u + \mu v \in U.$$

<u>Bem</u>: • Wegen $U \neq \emptyset$ ex. $u \in U \Rightarrow 0 \cdot u = 0 \in U$.

• Falls U Unterraum von V, so schreiben wir $U \leq V$.

b) <u>Bsp</u>: i) $\{0\} \leq V$, $V \leq V$

(ii) Die Lösungen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ des homog. lin. Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

bilden einen Teilraum von K^n

(iii) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit punktweise def Addition (vgl. Bsp 2b)
Dann bilden

• die stetigen Abb. $C(\mathbb{R})$ einen Teilraum

• die differenzierbaren Abb. einen Teilraum

iv) Betrachte die Lösungen $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ (einmal stetig diffbar)
der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = a(t) \cdot u(t)$$

für $a(t) \in \mathcal{C}([0,1])$.
Dann gilt $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\forall$ Lösungen u, v,
dass wegen

$$\begin{aligned} a(t)\big(\lambda u(t) + \mu v(t)\big) &= \lambda\, a(t)\, u(t) + \mu\, a(t) v(t) \\ &= \lambda \dot{u}(t) + \mu \dot{v}(t) \\ &\cancel{= (\lambda u(t) + \mu v(t))^{\cdot}} \\ &= (\lambda u \dot{+} \mu v)(t) \end{aligned}$$

die Funktion ~~[illegible]~~ $\lambda u + \mu v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ wieder eine Lösung ist. D.h. die Lösungsmenge bildet einen Teilraum von $\mathcal{C}^1([0,1])$.

c) <u>Proposition</u>: Seien U, W Teilräume des K-VR V.
Dann sind $U \cap V$ und

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$ Unterraum-summe

Unterräume von V.

<u>Bew</u>: i) z.z. $U \cap W \leq V$

⌜Seien $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in U \cap W$

$\underset{\substack{U \leq V \\ W \leq V}}{\Longrightarrow} \lambda x + \mu y \in U$ und $\lambda x + \mu y \in W$

$\Longrightarrow \lambda x + \mu y \in U \cap W$, d.h. $U \cap W \leq V$. ⌟

ii) z.z. $U + W \leq V$

⌜Seien $\lambda, \mu \in K$ und $u_1 + w_1,\ u_2 + w_2 \in U + W$.

$\Longrightarrow \lambda(u_1 + w_1) + \mu(u_2 + w_2) =$

$$\underbrace{\lambda u_1 + \mu u_2}_{\in U} + \underbrace{\lambda w_1 + \mu w_2}_{\in W} \in U + W.$$ ⌟

d) <u>Def.</u> Sei V ein K-VR und $M \subseteq V$. Die Menge

$$\operatorname{lin}(M) := \{\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n \mid \lambda_i \in K, m_i \in M\}$$

heißt <u>lineare Hülle</u> (oder <u>linearer Aufspann</u>) von M in V. Falls $M = \emptyset$, setzen wir $\operatorname{lin}(M) = \{0\}$.

M heißt Erzeugendensystem von $\operatorname{lin}(M)$.

<u>Später</u>: Falls M inklusionsminimal $\rightarrow$ <u>Basis</u> von $\operatorname{lin}(M)$.

<u>Proposition</u>: $\operatorname{lin}(M)$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.

<u>Bew</u>: i) z.z. $\operatorname{lin}(M) \leq V$ $\qquad$ o.B.d.A. $M \neq \emptyset$

⌜Seien $\lambda, \mu \in K$ und $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n \in \operatorname{lin}(M)$ und $\lambda_1' m_1' + \ldots + \lambda_{n'}' m_{n'}' \in \operatorname{lin}(M)$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n) + \mu(\lambda_1' m_1' + \ldots + \lambda_{n'}' m_{n'}')$$

$$= \lambda\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda\lambda_n m_n + \mu\lambda_1' m_1' + \ldots + \mu\lambda_{n'}' m_{n'}' \in \operatorname{lin}(M)$$ ⌟

ii) z.z. $\forall\, U \leq V$ mit $M \subseteq U$ gilt $\operatorname{lin}(M) \leq U$.

⌜Sei $U \leq V$ mit $M \subseteq U$. Wähle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $m_1, \ldots, m_n \in M$.

Wir zeigen $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n \in U$ durch Induktion nach n:

<u>Anfang</u>: $n = 1$: $\quad \lambda_1 m_1 = \lambda_1 m_1 + 0 \cdot m_1 \overset{U \leq V}{\in} U$

<u>Vor</u>: $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_{n-1} m_{n-1} \in U$

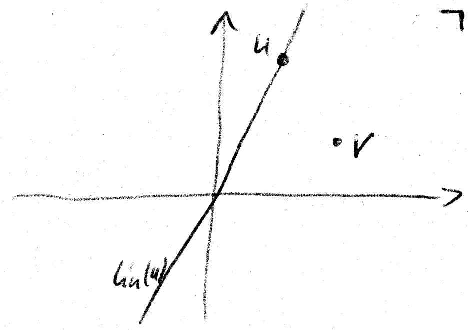
$$\Rightarrow \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n = 1 \cdot (\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_{n-1} m_{n-1}) + \lambda_n \cdot m_n \in U$$ ⌟

e) Wie sehen die Unterräume des Standard-VR $\mathbb{R}^2$ aus?

i) $\{0\} \leq \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^2$

ii) Sei $U \leq \mathbb{R}^2$ mit $u \neq 0$ und $u \in U$.

$\Rightarrow \operatorname{lin}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq U$



⌐ Falls ex. $v \in U \setminus \operatorname{lin}(u)$, dann gilt $U = \mathbb{R}^2$:

⌐ Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Wegen $v \notin \operatorname{lin}(u)$ ist $u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0$ ...

L

(Sonst gilt $u_1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 - u_1 v_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} = 0$, aber $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sind lin. unabhängig.)

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$\Rightarrow (v_2 x_1 - v_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (u_1 x_2 - u_2 x_1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 v_2 x_1 - \cancel{u_1 v_1 x_2} \\ u_2 \cancel{v_2 x_1} - u_2 v_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{u_1 v_1 x_2} - u_2 v_1 x_1 \\ u_1 v_2 x_2 - \cancel{u_2 v_2 x_1} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xRightarrow[u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0]{} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{lin}(\{u, v\})$$

⌟

(6) Wie testet man lineare (Un-) Abhängigkeit?

<u>Bsp:</u> Betrachte $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Dann gilt: (u, v, w) lin. abhängig

$\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \lambda u + \mu v + \nu w = 0$

$\Longleftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}:$

$$\left.\begin{aligned} \lambda + \quad 3\nu &= 0 \\ \mu - \nu &= 0 \\ -\lambda + \mu - 4\nu &= 0 \\ -2\mu + 2\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

D.h. die Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn das homogene GLS (*) eine nicht-triviale Lösung hat: $(-3,1,1)$ löst (*)

$\Rightarrow \quad -3u + v + w = 0$

$\Rightarrow \quad (u, v, w)$ sind lin. abhängig.

(7) a) Sei V ein K-VR.

<u>Def.</u>: • Eine Menge $M \subseteq V$ heißt <u>Erzeugendensystem</u> von V, falls $\mathrm{lin}(M) = V$.

• Eine Familie in V heißt <u>Basis</u>, falls sie ein <u>linear unabhängiges</u> Erzeugendensystem bildet.

b) <u>Bsp.</u> i) Im Standard K-VR K^n ist die Familie $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis, die <u>Standardbasis</u> von K^n

ii) [vgl. (6)] Betrachte den UR $U = \mathrm{lin}(u, v, w) \leq \mathbb{R}^4$.

Dann ist (u, v) eine Basis von U:

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \\ -2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu - \lambda \\ -2\mu \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow (u, v)$ lin. unabh.

Außerdem ist $w = 3u - v$, d.h. $w \in \mathrm{lin}(u, v)$

$\Rightarrow U = \mathrm{lin}(u, v)$

iii) $(1, i)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{C}$.

c) Def: Ein VR V heißt endlich erzeugt, falls er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

(8) a) Satz: Sei $V \neq \{0\}$ ein K-VR und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

i) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V

ii) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V, d.h. $\forall J \subsetneq I$ ist $(v_j)_{j\in J}$ kein Erzeugendensystem von V

iii) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabh. Familie, d.h. $\forall J' \supsetneq I$ ist $(v_j)_{j\in J'}$ lin. abh.

iv) (v_i) ist ein Erzeugendensystem von V, aus dem sich jeder Vektor von V eindeutig linear kombinieren lässt.

b) Folgerung: (Basisauswahlsatz)
Sei V ein K-VR und $v_1, \ldots, v_n$ ein (endliches) Erzeugendensystem von V. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so dass $(v_j)_{j\in J}$ eine Basis von V ist.

Bew: folgt aus a) i) $\Leftrightarrow$ ii) /

Bem: Insbesondere besitzt jeder endlich erzeugte VR eine Basis.
Es gilt: Jeder VR besitzt eine Basis.
Der Beweis nutzt das Auswahlaxiom.

(9) a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

über K. D.h. $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$, und gesucht sind Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

Fragen: i) Gibt es Lösungen?

ii) Falls ja: Ist die Lösung eindeutig?

iii) Falls nein: Beschreibe alle Lösungen.

iv) Gibt es einen Algorithmus?

b) Def: Das lin. GLS (*) heißt homogen, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Andernfalls heißt (*) inhomogen.

Bem: Aus 5 b ii) wissen wir, dass die Lösungsmenge eines homogenen lin. GLS ein Unterraum von K^n ist.

Frage a, iii) : Bestimmen Sie eine Basis!
(homog. Fall)

Spezialfälle von (*)

$\left.\begin{array}{l} \text{i) } m = n = 1 \\ \text{ii) } m = 1, n = 2 \end{array}\right\}$ Übung

c) Der Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Camille Jordan (1838-1922)

Beobachtung

Die Lösungsmenge des lin. GLS (*) ändert sich nicht unter den folgenden elementaren Zeilenoperationen:

(E1) Addiere zu einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung.

(E2) Tausche zwei Gleichungen.

(E3) Multipliziere eine Gleichung mit $\lambda \in K - \{0\}$.

Algorithmus

[1] • Falls $a_{11} \neq 0$, subtrahiere das

$\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -fache der 1. Gleichung von der 2.

$\frac{a_{31}}{a_{11}}$ - fache der 1. Gleichung von der 3.

$\vdots$

$\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ - fache der 1. Gleichung von der m-ten

• Falls $a_{11} = 0$, so finde $a_{i1} \neq 0$ und vertausche die 1. Gleichung mit der i-ten.

• Falls kein solches a_{i1} existiert (d.h. die gesamte 1. Spalte $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$), so tue nichts

Danach sieht das modifizierte GLS so aus

$$\begin{array}{l} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2} x_2 + \ldots + a'_{mn} x_n = b'_m \end{array}} \end{array}$$

[2] Die unteren $m-1$ Gleichungen des modifizierten GLS können nun wie im Schritt [1] behandelt werden.

⋮

u.s.w.

[m-1]

Nach $m-1$ Schritten hat das dann entstandene lineare GLS die folgende Zeilenstufenform:

$$\left.\begin{array}{rcl}
c_{1j_1} x_{j_1} + \ldots + c_{1n} x_n & = & d_1 \\
c_{2j_2} x_{j_2} + \ldots + c_{2n} x_n & = & d_2 \\
\vdots & & \vdots \\
c_{rj_r} x_{j_r} + c_{rn} x_n & = & d_r \\
0 & = & d_{r+1} \\
\vdots & & \vdots \\
0 & = & d_m
\end{array}\right\} \quad (**)$$

x_{j_k} Pivotvariablen

Dabei gilt $\forall k \in \{1, \ldots, r\}: c_{kj_k} \neq 0$ und $j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$, sowie $0 \leq r \leq m$.

Def: Die Zahl r heißt Rang von $(**)$.

Wie bestimmt man die Lösungsmenge L des GLS $(**)$ (und damit die von $(*)$)?

Fall 1: $d_{r+1} \neq 0$ oder ... oder $d_m \neq 0$

$\Rightarrow L = \emptyset$

Fall 2: $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$

i) Wähle beliebige Werte aus K für jedes der $n-r$ Nicht-Pivotvariablen

ii) Löse danach die r-te Gleichung auf:

$$x_{j_r} = c_{rj_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{rj_{r+1}} x_{r+1} - \ldots - c_{rn} x_n)$$

Danach die (r−1)-te Gleichung usw.

iii) $|L| = 1 \Leftrightarrow r = n$ und $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$

d) Bsp i) LGS über $\mathbb{R}$ mit $m=4$ und $n=3$, ohne Lsg.

ii) LGS über $\mathbb{R}$ mit $m=n=3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Zeilenstufenform

$$x_3 = -4/7$$

$$x_2 = 1 + 2 \cdot x_3 = 1 - 8/7 = -1/7$$

$$x_1 = 0 - x_2 - 2x_3 = 1/7 + 8/7 = 9/7$$

$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} 9/7 \\ -1/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ eindeutige Lsg.

iii) HA: Löse ii) über $\mathbb{F}_3$!

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\Rightarrow$ "−1" = 2

"−2" = 1

e) Der homogene Fall

Im homogenen Fall sind sämtliche $b_k = 0$, und falls $r < n$, so können wir $n-r$ verschiedene Lsg. $b_1, \dots, b_{n-r}$ wie folgt konstruieren:

b_k entsteht wie unter d) erläutert, wobei man für die k-te Nicht-Pivotvariable 1 und für die übrigen 0 wählt und anschließend die Werte für die Pivotvariablen ausrechnet.

<u>Proposition</u>: $(b_1, \dots, b_{n-r})$ ist eine Basis des Lösungsraums.

<u>Bew</u>: ÜA

<u>Bsp</u>: $n = 4$, $m = 3$, $K = \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_2 + 3i x_3 &= 0 \\
x_1 + 3x_2 + (1+3i)x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_2 + 3i x_3 &= 0 \\
2x_2 + 3i x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_2 + 3i x_3 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Nicht-Pivotvariablen: x_3, x_4

Basislsg: $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{\text{analog}}{}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
2b_{12} &= -3i x_3 \\
\Rightarrow b_{12} &= -\tfrac{3}{2} i \\
b_{11} &= -b_{12} - x_3 - x_4 = -\tfrac{3}{2} i
\end{aligned}
\quad \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(10) Sei V ein K-VR, der endlich erzeugt ist.

a) <u>Austauschlemma</u>

Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V und
$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in V$.
Ist $k \in \{1, \dots, r\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, dann ist

$$(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r)$$

wieder eine Basis von V.

b) <u>Austauschsatz</u>

Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V, und sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine linear unabhängige Menge.
Dann gilt $n \leq r$ und es gibt Indizes $i_1, \dots, i_{r-n} \in \{1, \dots, r\}$, so dass

$$(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots v_{i_{r-n}})$$

wieder eine Basis von V ist

c) <u>Folgerung</u>

Jede Basis von V ist endlich.

<u>Bew:</u> V endlich erzeugt $\Rightarrow \exists$ endliche Basis $(v_1, \dots, v_r)$
Angenommen, es ex. zweite Basis, die unendlich ist. $\Rightarrow \exists$ linear unabh. Familie $(w_1, \dots, w_{r+1})$
$\lightning$ zu Austauschsatz. //

d) Folgerung

Jede Basis von V hat dieselbe Länge.

Bew: $(v_1, \dots, v_r)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen.

Austauschsatz: $n \leq r$ und $r \leq n$

$\Rightarrow r = n$. //

e) Folgerung

Jede linear unabhängige Familie in V lässt sich zu einer Basis fortsetzen.

Bew: folgt aus b) /

(11) a) Def: Ist V ein K-VR, so bezeichnet

$$\dim_K V := \begin{cases} r, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } r \text{ besitzt,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Dimension von V über K

b) i) $\dim_K K^n = n$

ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

iii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (ohne Bew.)

iv) $\dim_K 0 = 0$

c) Proposition

Sei V ein K-VR mit $\dim V < \infty$ und $U < V$ ein echter Teilraum.

Dann gilt $\dim_K U < \dim_K V$.

Bew: Sei $(u_1, \ldots, u_k)$ Basis von U und
$(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.

Da $U \subsetneqq V$, $\exists\ v \in V \setminus U$ und damit
$v \notin \mathrm{lin}(u_1, \ldots, u_k)$.

$\underset{4.g)}{\Longrightarrow}$ $(u_1, \ldots, u_k, v)$ linear unabh.

$\underset{10.6)}{\Longrightarrow}$ $k+1 \leq n$ //

§3 Lineare Abbildungen

(1) Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K

a) Def: Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear, falls gilt

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

für alle $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in K$.

b) Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung

Def: • Die Menge

$$\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

heißt Bild von f.

• Die Menge

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$$

heißt Kern von f. $\boxed{0 \in \operatorname{Ker} f}$

c) Bsp: Sei V beliebig und $v_1, \dots, v_n \in V$.

Dann ist die Abbildung

$$f: K^n \to V : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

linear. Es gilt

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n)$$

und

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in K^n \mid x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0 \}$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$ lin. unabh.

d) Proposition Eine lin. Abb. $f: V \to W$ ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Ker} f = 0$ ist.
Außerdem gilt $\forall u, v \in V$:

$$f(u) = f(v) \iff u - v \in \operatorname{Ker} f.$$

Bew: Seien $u, v \in V$:

$$0 = f(u) - f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ linear}}}{=} f(u-v) \iff u - v \in \operatorname{Ker} f.$$

Sei $f: V \to W$ injektiv. z.z.: $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

⌈ Sei $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0)$

$$\underset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = 0$$ ⌋

Sei $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. z.z. f injektiv

⌈ Seien $u, v \in V$ mit $f(u) = f(v)$.
$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$
$\Rightarrow u = v$. ⌋

□

(2) Für das folgende erweitern wir die Addition von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ durch

$$u + \infty := \infty =: \infty + u \quad \forall u \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

a) Satz: Sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

[Dimensionsformel]

Bew: Falls $\dim V = \infty$, so ist zu zeigen

$$\dim \operatorname{Ker} f = \infty \text{ oder } \dim \operatorname{Im} f = \infty.$$

O.B.d.A sei
$\dim \operatorname{Ker} f \in \mathbb{N}$ und $\dim \operatorname{Im} f \in \mathbb{N}$
[Falls $\dim V = \infty$ folgt die Beh. durch Kontraposition.]

Sei $k = \dim \operatorname{Ker} f$ und $l = \dim \operatorname{Im} f$.

D.h., es ex. Basen $(v_1, \dots, v_k)$ von $\operatorname{Ker} f$ und $(w_1, \dots, w_l)$ von $\operatorname{Im} f$.

Für alle $j = 1, \dots, l$ ex. $v_{k+j} \in V$ mit $f(v_{k+j}) = w_j$.

z.z. $(v_1, \dots, v_{k+l})$ ist Basis von V

i) $(v_1, \dots, v_{k+l})$ erzeugt V:

⌜ Sei $v \in V \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_l$ mit

$$
\begin{aligned}
f(v) &= \mu_1 w_1 + \dots + \mu_l w_l \\
&= \mu_1 f(v_{k+1}) + \dots + \mu_l f(v_{k+l}) \\
&= f(\mu_1 v_{k+1} + \dots + \mu_l v_{k+l})
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow v - \mu_1 v_{k+1} - \dots - \mu_l v_{k+l} \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\overset{\shortparallel}{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k} \text{ für gewisse } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K. \quad ⌟$$

ii) $(v_1, \dots, v_{k+l})$ linear unabh.

⌜ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+l} \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k+l} v_{k+l} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k+l} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k+l} \lambda_i f(v_i)$$

$$= \lambda_{k+1} w_1 + \dots + \lambda_{k+l} w_l$$

$$\xRightarrow{(w_1, \dots, w_l) \text{ Basis}} \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+l} = 0.$$

$$\xRightarrow{(v_1, \dots, v_k) \text{ Basis}} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \quad \left(\text{da } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0\right) \quad ⌟$$

□

b) <u>Satz</u> Sei $f: V \to V$ eine lineare Abb. und $\dim V < \infty$.

Äquivalent sind:

i) f ist injektiv.

ii) f ist surjektiv.

iii) f ist bijektiv.

<u>Bew:</u> Sei $n = \dim V$.

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv} \underset{1,d)}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Ker} f = \{0\} \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$$\underset{a)}{\Longleftrightarrow} \dim \operatorname{Im} f = n \underset{2.11.c)}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Im} f = V$$

$$\Longleftrightarrow f \text{ surjektiv.}$$

□

<u>Bem:</u> Für ∞-dimensionale VR existieren <u>stets</u> injektive lin. Abb., die nicht surjektiv sind und surjektive lin. Abb., die nicht injektiv sind.

$\to$ ÜA

c) Sei $f: V \to W$ linear

<u>Def:</u> $\operatorname{rank}_K f = \dim_K f(V) = \dim_K \operatorname{im} f$

heißt <u>Rang von f</u> (über K).

Falls $\dim V < \infty$, so gilt wegen a)

$$\operatorname{rank} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

d) <u>Bsp.</u> [Fortsetzung zu 1c)]

Sei $V = K^n$ und $v_1, \dots, v_n \in V$.

Die Abb.

$$f: K^n \to K^n: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

ist linear.

Dann gilt:

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$$
$$\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ lin. unabh.}$$
$$\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ Basis von } V$$

(3) <u>Proposition</u>: Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $f: V \to W$ eine lin. Abb. Es gilt:

a) $\operatorname{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \operatorname{Im} f$

b) $\operatorname{rank} f$ = max. Anzahl lin. unabh. Vektoren von $(f(v_1), \dots, f(v_n))$

c) f surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim W$

d) f injektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ lin. unabh.

e) f bijektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W

<u>Bew</u>: $\to$ ÜA

(4) <u>Satz</u>: Seien V, W K-VR, $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$.
Dann ex. eindeutig bestimmte lin. Abb. $f: V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i \ \forall i$.

$\rightsquigarrow$ [Hauptsatz über lin. Abb.]

<u>Bew</u>: Jeder Vektor v aus V hat <u>eindeutige</u> Darstellung als LK

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

mit $\lambda_i \in K$.
Wir setzen $f(v) := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$.
Wegen $v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$ ist $f(v_i) = w_i$. Offenbar ist f linear.

Angenommen, es ex. weitere lin. Abb. $g: V \to W$ mit $g(v_i) = w_i \ \forall i$.
Dann gilt für beliebiges
$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$g(v) \underset{g \text{ linear}}{=} \sum \lambda_i g(v_i) = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(v_i) \underset{f \text{ linear}}{=} f(v)$$

$\Rightarrow g = f$

$\square$

(5) Sei V ein K-VR mit $\dim V = n < \infty$.
Wähle Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Der Standardvektorraum K^n hat $(e_1, \ldots, e_n)$ als Basis. Wegen (4) ex. eindeutig bestimmte lin. Abb. $f: K^n \to V$ mit $f(e_i) = v_i \ \forall i$

Wegen 3e) ist f bijektiv.

<u>Def:</u>
- Eine bijektive K-lineare Abb. heißt <u>K-Vektorraum-Isomorphismus</u>.
- Zwei K-Vektorräume V, W heißen <u>isomorph</u>, falls ein K-VR-Isomorphismus von V nach W existiert.

<u>Bem:</u> Wenn $f: V \to W$ einen Isomorphismus ist, so ist die Umkehrabb. $f^{-1}: W \to V$ def. und ebenfalls bijektiv.
Aus (4) folgt, dass auch f^{-1} linear ist, also selbst wieder ein Isomorphismus.

<u>Folgerung:</u> Sei V ein n-dim. K-VR mit $n < \infty$.
Dann ist V isomorph zu K^n.

(7) a) <u>Def.:</u> Sei X eine Menge und $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Eine <u>$m \times n$ Matrix M mit Koeffizienten</u> in X ist eine Abb.

$$M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to X.$$

b) <u>Bsp:</u> Schwarz-Weiß-Bild $\rightsquigarrow$ $m \times n$ Matrix mit Koeffizienten aus $\{0, 1\}$

c) <u>Notation:</u> Üblicherweise schreibt man eine Matrix $M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to X$ als rechteckiges Schema

$$\begin{array}{cc} & \\ \text{i-te Zeile} & \begin{pmatrix} M(1,1) & \cdots & & M(1,n) \\ \vdots & & & \vdots \\ & & M(i,j) & \\ \vdots & & & \vdots \\ M(m,1) & \cdots & & M(m,n) \end{pmatrix} \\ & \text{j-te Spalte} \end{array}$$

d) Seien V, W VR über K und $f : V \to W$ eine lineare Abb.

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw W.

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ex. eindeutig bestimmte $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in} \in K$ mit

$$f(v_i) = \mu_{i1} w_1 + \dots + \mu_{in} w_n$$

<u>Def.:</u> Die Matrix

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$$
$$(i, j) \mapsto \mu_{ij}$$

heißt <u>Matrix von f</u> bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

<u>Ziel der VL</u>: zu verstehen, inwiefern Matrizen "dasselbe" wie lin. Abb. sind bzw. diese beschreiben

(8) „Strukturen" linearer Abb.

a) <u>Die VR-Struktur auf der Menge der lin. Abb $V \to W$</u>

<u>Def</u>: Seien V und W K-VR.

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ linear}\}$$

<u>Homomorphismen von V nach W</u>

<u>Prop.</u>: $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist UVR des K-VR <u>aller</u> Abb. von V nach W

<u>Bew</u>: Zur Erinnerung die Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$
$$(\lambda\varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$$

Seien $\varphi, \psi : V \to W$ linear.

Z.z: $\varphi + \psi$ und $\lambda \cdot \varphi$ sind linear.

<u>Rechnung</u>: $a, b \in K$, $u, v \in V$

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(au+bv) &= \varphi(au+bv) + \psi(au+bv)\\ &= a\varphi(u) + b\cdot\varphi(v) + a\psi(u) + b\psi(v)\\ &= a(\varphi(u)+\psi(u)) + b(\varphi(v)+\psi(v))\\ &= a\cdot(\varphi+\psi)(u) + b\cdot(\varphi+\psi)(v)\end{aligned}$$

u.s.w.

b) <u>Komposition linearer Abb.</u>

<u>Prop</u>: U, V, W K-VR

i) sind $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ linear, so auch $\psi \circ \varphi : U \to W$.

ii) $id : V \to V$ ist linear.

iii) Ist $\varphi : U \to V$ bijektiv und linear, so ist auch φ^{-1} linear.

Bew: i) $\psi \circ \varphi(au+bv) = \psi(a\varphi(u)+b\varphi(v))$

$$= a\cdot\psi\circ\varphi(u) + b\cdot\psi\circ\varphi(v)$$

ii) klar

iii) Nutze Bijektivität: $v_1 = \varphi(u_1)$, $v_2 = \varphi(u_2)$:

$$\varphi^{-1}(av_1+bv_2) = \varphi^{-1}\circ\varphi(au_1+bu_2)$$
$$= au_1 + bu_2$$
$$= a\varphi^{-1}(v_1) + b\varphi^{-1}(v_2)$$

c) Zusammenspiel beider Verknüpfungstypen

Prop: Seien $\varphi_1, \varphi_2 : U \to V$ und
$\psi_1, \psi_2 : V \to W$ lineare Abb.

Dann gilt

i) $\psi_1\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \psi_1\circ\varphi_1 + \psi_1\circ\varphi_2$

ii) $(\psi_1+\psi_2)\circ\varphi_1 = \psi_1\circ\varphi_1 + \psi_2\circ\varphi_1$

iii) $(\lambda\psi_1)\circ\varphi_1 = \lambda(\psi_1\circ\varphi_1) = \psi_1\circ(\lambda\varphi_1)$.

Bew: $\forall u \in U$ gilt

$$\psi_1\circ(\varphi_1+\varphi_2)(u) = \psi_1(\varphi_1(u)+\varphi_2(u))$$
$$= \psi_1\circ\varphi_1(u) + \psi_1\circ\varphi_2(u)$$

u.s.w.

Satz: End(V) = Hom(V,V) ist mit den Verknüpfungen $(+,\circ)$ ein Ring mit 1.

Bew: - $\circ$ assoziativ (immer)
- hat $id: V \to V$
- distributiv

Bem: Da noch iii) (Verträglichkeit mit Skalarmult.) gilt, ist End(V) sogar eine K-Algebra.

d) Spezialfall: Satz: $GL(V) = \{\varphi: V\to V \mid \varphi \text{ linear und bijektiv}\}$ ist mit $\circ$ eine Gruppe. (General linear group)

(9) „Strukturen" von Matrizen

a) Der VR der $m \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in K

Notation: geg $A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$

$$(i,j) \mapsto a_{ij}$$

Schreibe $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$

Verknüpfungen: komponentenweise:

Ist $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$,

so $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Bem: Dies entspricht der Standardaddition und Skalarmultiplikation der Abb. Daher ist $M_{m \times n}(K)$ ein K-VR.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Multiplikation von Matrizen

1. Spezialfall: Def: Man kann ein $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $n \times 1$ Matrix $x = (x_{i,1})$ (Spaltenvektor) multiplizieren und das Ergebnis ist die $m \times 1$ Matrix $y = (y_{i,1})$ mit

$$y_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1} \quad , i = 1, \dots, m.$$

Erläuterung: Man kann damit das lineare GLS $\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{matrix}$ in der Matrixform $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ schreiben.

Merksatz: "Zeile mal Spalte"

2. Motivierender Einschub: lin. Abb. zu einer Matrix

$A \in M_{m \times n}(K)$ gibt $\varphi_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$

Dabei sind die Bilder der Standardbasisvektoren die Spalten von A: $\varphi_A(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Komposition zweier solcher Abb. $\to$ Produkt der Matrizen

Sei also $\varphi = \varphi_A \circ \varphi_B$, $\varphi_B : K^k \to K^n$, $\varphi_A : K^n \to K^m$.
Dann ist $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times k}(K)$ und daher $AB \in M_{m \times k}(K)$

3. Definiere $C = AB$ durch $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$

Bem: Fasst man B als nebeneinandergeschriebene Spaltenvektoren auf, so schreibt man die Ergebnisse ($A \cdot$ Spalte von B) nebeneinander.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$n\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{n} \right.$ heißt Einheitsmatrix E_n

c) Zusammenspiel beider Verknüpfungstypen

Proposition: Seien $A, A_1, A_2 \in M_{m \times n}(K)$
$B, B_1, B_2 \in M_{n \times k}(K)$.

Dann gilt

i) $A \cdot (B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

ii) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

iii) $(\lambda A) \cdot B = \lambda (AB) = A(\lambda B)$

Satz: $M_n(K) := M_{n \times n}(K)$ ist mit den Verknüpfungen $(+, \circ)$ ein Ring mit 1 und eine K-Algebra.

Bew:
- assoziativ
- E_n neutrales Element bzgl. $\circ$
- distributiv

//

d) **Spezialfall**

Def: Eine Matrix A heißt invertierbar, falls eine Matrix A^{-1} existiert, so dass $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

Satz: $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe (General linear group).

Bsp:
- Diagonalmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen sind invertierbar

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- obere Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen sind invertierbar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wdh: Die Matrix zu einer linearen Abb:

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ $\{w_1, \dots, w_m\}$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} | & & | \\ \varphi(v_1) & \dots & \varphi(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

In den Spalten stehen die Bilder der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$, d.h. ihre Koordinaten bzgl. der Basis von W.

Jetzt: Spezialfall $\varphi : K^n \to K^m$ mit Standardbasis. Dann sind die Koordinaten einfach die entsprechenden Zahlen

Bsp: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3x2 Matrix

$\varphi = \varphi_A$, denn $Ax = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(10) Sei K ein Körper.

a) Def: $K^{m \times n} = M_{m \times n}(K)$

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n \times 1}$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

$\Rightarrow \varphi_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ ist lin. Abb.

b) Es gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\varphi_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } A.$$

$\Rightarrow$ Spalten von A = Bilder der Standardbasisvektoren unter der Abb. φ_A

c) $\operatorname{Im} \varphi_A = \varphi_A(K^n) = \{ b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b \}$

$= \operatorname{lin}(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n))$

$=$ Unterraum von K^m, der von den Spalten von A aufgespannt wird

$=:$ Spaltenraum von A

Def.: $\operatorname{rank}_K A := \operatorname{rank}_K \varphi_A = \dim_K \operatorname{Lin}(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n))$

heißt Rang der Matrix A (über K).

d) Rangberechnung

Bsp.: Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&2 \\ 2&0&2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$.

Wende Gauß-Jordan-Elimination an auf das GLS $Ax = 0$

$$\begin{matrix} 1&0&1 \\ 0&1&2 \\ 2&0&2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1&0&1 \\ 0&1&2 \\ 0&0&0 \end{matrix}$$

Lin. GLS in Zeilenstufenform hat Rang 2 vgl. 2.9c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}_{\mathbb{F}_3} A = 2$.

Satz: Der Rang einer Matrix A entspricht stets dem Rang einer Zeilenstufenform aus dem Gauß-Jordan-Alg. angewendet auf $Ax = 0$.

Beweisidee: Die elementaren Zeilenoperationen (E1), (E2), (E3) verändern den Rang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ nicht

⌜ (E1) Addiere zu einer Zeile j das λ-fache der Zeile i:

$A' = L'A$, wobei $L' = I_m + \lambda E_{ji} \in K^{m\times n}$

und $E_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & 1 & & \\ 0 & \vdots & & 0 \end{pmatrix}$ — j-te Zeile

i-te Spalte $\qquad i \neq j$

Es gilt $E_{ji}^2 = 0 \Rightarrow L'^{-1} = I_m - \lambda E_{ji}$, d.h. $L' \in GL_m(K)$.

(E2) Tauschen zweier Reihen i,j mit $i \neq j$:

$A' = L'A$, wobei

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & 0 & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ - i \\ \\ - j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\qquad\qquad \uparrow i \quad \uparrow j$$

Es gilt $L'^2 = I_m$, d.h. $L'^{-1} = L'$.

Insbesondere ist $L' \in GL_m(K)$

(E3) Multipliziere die i-te Reihe mit $\lambda \in K - \{0\}$.

$A' = L'A$, wobei

$$L' = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\overset{\overset{i}{\downarrow}}{\lambda},1,\dots 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $L'^{-1} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda^{-1},1,\dots,1)$, also $L \in GL_m(K)$.

Sei A'' Zeilenstufenform zu A. Dann ex. $L_1,\dots,L_k \in GL_m(K)$, so dass $A'' = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A$, bzw. $A'' = L''A$ für $L'' = L_k L_{k-1} \cdots L_1 \in GL_m(K)$.

Es gilt $\boxed{\varphi_{A''} = \varphi_{L''} \circ \varphi_A}$

Außerdem ist $\varphi_{L''}$ invertierbar.

$\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi_{A''} = \varphi_{L''}(\operatorname{Im} \varphi_A)$

und $\dim \operatorname{Im} \varphi_{A''} = \dim \operatorname{Im} \varphi_A$. ☐

e) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.

<u>Def</u>: Die Matrix

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$$

heißt <u>Transponierte</u> von A

<u>Proposition</u>: Sei $A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$.

$\Rightarrow (AB)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$.

<u>Bew</u>: ÜA

<u>Bem</u>: <u>Zeilenrang</u> einer Matrix := # linear unabh. Zeilen

$\Rightarrow$ Zeilenrang von A = Rang von A^{tr}

<u>Folgerung</u>: Für $A \in K^{m \times n}$ gilt: Zeilenrang von A = Rang von A.

<u>Bew</u>: ÜA

f) <u>Proposition</u>: Die Abb.

$$\Phi : K^{m \times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$$
$$A \longmapsto \varphi_A$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Die Abb. Φ^{-1} ordnet einer linearen Abb $\varphi : K^n \to K^m$ die Matrix $[\varphi]$ von φ bzgl. der Standardbasen von K^n und K^m zu.

Bem: In (5) wurde gezeigt, dass die Umkehrabb. einer bijektiven linearen Abb. selbst wieder linear ist.

$$\Rightarrow [\varphi+\psi]=[\varphi]+[\psi] \quad \forall \varphi,\psi\in \mathrm{Hom}(K^m,K^n).$$

Folgerung: $\dim_K \mathrm{Hom}(K^m,K^n)=m\cdot n$

9) **Proposition**

i) $\forall A\in K^{\ell\times m}, B\in K^{m\times n}: \varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}$

ii) $\forall \psi\in \mathrm{Hom}(K^\ell,K^m), \varphi\in \mathrm{Hom}(K^m,K^n)$:

$$[\varphi\circ\psi]=[\varphi]\cdot[\psi].$$

iii) Die Abbildung

$$\Phi: K^{n\times n}\to \mathrm{End}(K^n)$$
$$A\mapsto \varphi_A$$

ist (ein K-VR-Isomorphismus und) ein Ringisomorphismus [insgesamt: Φ ist K-Algebra-Isomorphismus].

Bew i) $\forall x\in K^n$: $(\varphi_A\circ\varphi_B)(x)=\varphi_A(\varphi_B(x))$

$$=\varphi_A(Bx)=A(Bx)=(AB)(x)$$
$$=\varphi_{AB}(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}$$

(11) a) Sei V ein K-VR mit $\dim V = n$ und sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Dann lässt sich $v \in V$ eindeutig schreiben als $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Setze

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n.$$ Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{B}$

Die Abb.

$$k_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$
$$v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

ist ein K-VR-Isomorphismus, weil das Bild von $\mathcal{B}$ wegen $[b_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$ eine Basis von K^n ist.

b) Seien V, W K-VR und $f: V \to W$ linear.

Zu Basen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ von V bzw W ist

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} := M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \left([f(v_1)]_{\mathcal{C}} \dots [f(v_n)]_{\mathcal{C}} \right)$$

die Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

c) Proposition:

Für alle $v \in V$ gilt

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}} = [f(v)]_{\mathcal{C}}$$

$[\Leftrightarrow (k_{\mathcal{C}} \circ f)(v) = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} (k_{\mathcal{B}}(v))$

$\Leftrightarrow [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [k_{\mathcal{C}} \circ f \circ k_{\mathcal{B}}^{-1}]$ $]$.

Bew: Da die beiden Abb. von V nach K^n:

$$v \longmapsto [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad v \longmapsto [f(v)]_{\mathcal{C}}$$

linear sind, genügt es, sie auf einer Basis zu vergleichen, z.B. $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [b_i]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} e_i = i\text{-te Spalte von } [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$
$$= [f(b_i)]_{\mathcal{C}}$$

$\square$

d) Für jede lin. Abb. $f: V \to W$ existiert zu geg. Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ eine Matrix $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Wir def. die Abb.

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}: \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow K^{m \times n}$$
$$f \longmapsto [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

analog zu 10.f).

Proposition

$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}: \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m \times n}$ ist ein linearer Isomorphismus.

Bew: analog zu 10.f).

e) Proposition

Seien U, V, W K-VR mit Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Für Abb. $g: U \to V$ und $f: V \to W$ gilt dann

$$[f \circ g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}.$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, phantom, "="] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}"] \\
K^p \arrow[r, "{[g]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}}"'] & K^n \arrow[r, "{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

<u>Bew:</u>
$$\begin{aligned}
[f\circ g]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} &= [k_{\mathcal{C}}\circ f\circ g\circ k_{\mathcal{A}}^{-1}] \\
&= [k_{\mathcal{C}}\circ f\circ k_{\mathcal{B}}^{-1}\circ k_{\mathcal{B}}\circ g\circ k_{\mathcal{A}}^{-1}] \\
&= [k_{\mathcal{C}}\circ f\circ k_{\mathcal{B}}^{-1}]\,[k_{\mathcal{B}}\circ g\circ k_{\mathcal{A}}^{-1}] \\
&= [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}\,[g]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

$\square$

(12) a) Seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ Basen des K-VR V.

Jedes $v \in V$ lässt sich bzgl. $\mathcal{B}$ und bzgl. $\mathcal{B}'$ darstellen:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$$

Z.B. für die Vektoren $b_1', \dots, b_n'$:

$$[b_i']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{pmatrix}, \quad [b_i']_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Stelle}$$

Es gilt

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} = [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

<u>Transformationsmatrix des Basiswechsels</u> von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$.

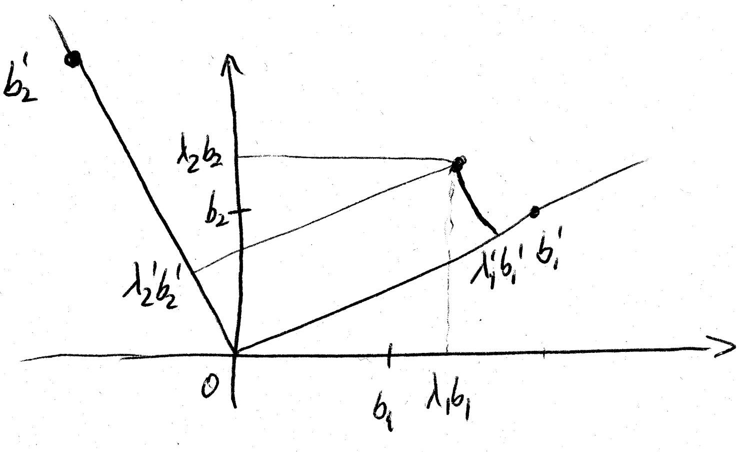
Die Spalten von S bilden eine Basis von V.
$\Rightarrow$ S ist invertierbar und $S^{-1} = [id_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

b) <u>Bsp:</u> $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ und $\mathcal{B}' = \left(\binom{2}{1}, \binom{-1}{2}\right)$.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_1' - \lambda_2' \\ \lambda_2 = \lambda_1' + 2\lambda_2' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{1}{5}\lambda_2 \\ \lambda_2' = -\frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{2}{5}\lambda_2 \end{cases}$$



c) <u>Proposition</u>

Sei $f: V \to W$ linear. Ferner seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W.
Setze $S = [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ und $R = [id_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

Dann gilt

$$[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = R^{-1} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} S$$

und

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = R \, [f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} S^{-1}!$$

Bew: folgt aus 11e) $\square$

(13) a) Betrachte das lin. GLS über dem Körper K:

$$(*) \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Wir fassen die Koeffizienten a_{ij} in der Matrix

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ zusammen.

Ähnlich $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$.

Wenn wir die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ in einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammenfassen, dann läßt sich $(*)$ schreiben als $Ax = b$.

Das zugehörige homogene System ist

$(**) \quad Ax = 0$

b) Die Lösungen von $(**)$ bilden einen UVR U von K^n. Dabei ist $\dim U = n - \operatorname{rank} A =: k$.

Eine Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U heißt <u>System von Fundamentallösungen</u> von $(**)$. Jede Lösung von $(**)$ ist Linearkombination der Fundamentallösungen.

c) Existenz von Lösungen

- Das homogene System (**) hat stets die triviale Lösung $x=0$.
- Das inhomogene System (*) hat mind. eine Lösung $\underset{10c)}{\Longleftrightarrow}$ $b \in$ Spaltenraum von A

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b),$$

wobei

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}$$

d) Angenommen das inhomogene System (*) hat mindestens eine Lsg $x_0 \in K^n$

Dann ist

$$x_0 + U = \{x_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \mid \lambda_i \in K\}$$

die Menge <u>aller</u> Lösungen von (*).

<u>Def:</u> Sei V ein K-VR, $U \leq V$, $x \in V$.

Dann heißt die Menge $x+U$ <u>affiner Unterraum</u> von V.

e) Sei nun $m=n$, d.h. $A \in K^{n \times n}$ ist quadratisch.

<u>Proposition</u> Äquivalent sind:

i) Das lin. GLS $Ax=b$ hat eine eindeutige Lsg.

ii) A ist invertierbar

iii) $\operatorname{rank}(A) = n$.

<u>Bew:</u> $Ax=b$ hat eindeutige Lsg

$\Longleftrightarrow \dim(\text{Lösungsraum}(Ax=0)) = 0$

$\Longleftrightarrow \varphi_A$ bijektiv $\Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n \underset{\text{Prop 3e)}}{\Longleftrightarrow} A$ invertierbar $\square$

§4 Determinanten

(1) Ziel dieses Abschnitts:

Einführung einer Abbildung

$$\det : K^{n\times n} \to K$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $\det(I_n) = 1$
- $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A^{tr}) = \det(A)$
- A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- Für $K=\mathbb{R}$: $|\det(A)| = \mathrm{vol}$ (Parallelepiped aufgespannt von Zeilen/Spalten von A).

(2) In 2.5e) wurden die Unterräume von $\mathbb{R}^2$ bestimmt. Dabei kam unter anderem heraus, dass $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind genau dann, wenn gilt $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \text{ invertierbar}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ eindeutig lösbar für alle } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Bem: Dies gilt für beliebige Körper K, also analog auch in K^2.

(3) a) Sei K stets ein Körper. Im folgenden identifizieren wir oft

$$K^{n\times n} = \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n \text{ mal}}.$$

D.h. wir sehen eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ an als das geordnete n-Tupel ihrer Spalten

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right).$$

b) <u>Def:</u> Eine Abb. $F: \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n} \to K$ (für $n \geq 1$) heißt

i) <u>Multilinearform auf K^n</u> (oder <u>n-Form</u>), falls gilt $\forall i \; \forall v_k \; \forall \lambda, \mu \in K \; \forall x, y \in V$:

$$F(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda x + \mu y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$
$$= \lambda \cdot F(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) +$$
$$\mu \cdot F(v_1, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

[d.h. F ist linear in jedem Argument.]

ii) <u>alternierende Multilinearform</u> auf K^n, falls außer i) zusätzlich gilt:

$$F(v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad \text{falls } v_i = v_j \text{ für } i \neq j.$$

iii) <u>normierte alternierende Multilinearform</u> auf K^n (oder <u>Determinantenform</u>), falls außer i) und ii) zusätzlich gilt:

$$F(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

c) Bsp i) Die Abb. $id_K : K \to K$ ist eine Determinantenform auf $K = K^1$:

- für $n=1$: multilinear = linear
- für $n=1$: alternierend keine zusätzliche Bedingung
- $id_K(1) = 1 \Rightarrow$ normiert

ii) Die Abb. $F: K^2 \times K^2 \to K$

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto u_1 v_2 - u_2 v_1$$

ist eine Determinantenform auf K^2:

- $$F\left(\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= (\lambda u_1 + \mu u_1') v_2 - (\lambda u_2 + \mu u_2') v_1$$
$$= \lambda (u_1 v_2 - u_2 v_1) + \mu (u_1' v_2 - u_2' v_1)$$
$$= \lambda F\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) + \mu F\left(\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)$$

- $$F\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$$

- $$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

(4) a) <u>Lemma:</u> Sei $F: K^n \times \dots \times K^n \to K$ eine alternierende Multilinearform und $v_1, \dots, v_n \in K^n$. Dann gilt $F(v_1, \dots, v_n) = 0$, falls $(v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig sind.

Bew: Sei $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$

Dann gilt

$$F(v_1, \ldots, v_n) = F(\lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_2, v_2, \ldots, v_n)$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \underbrace{F(v_k, v_2, \ldots, v_n)}_{=0}$$
$$= 0$$

□

b) Satz

Sei $F: K^n \times \ldots \times K^n \to K$ eine alternierende Multilinearformen mit $F(e_1, \ldots, e_n) = 0$. $\Rightarrow F \equiv 0$.

c) Folgerung

Seien $F, G: K^n \times \ldots \times K^n \to K$ alternierende Linearformen mit $F(e_1, \ldots, e_n) = G(e_1, \ldots, e_n)$. $\Rightarrow F \equiv G$.

Insbesondere gibt es höchstens eine Determinantenform auf K^n.

(5) Konstruktion der Determinantenform auf K^n

a) Unter (2) hatten wir bereits Determinantenformen auf $K = K^1$ und $K = K^2$ konstruiert:

$$D_1: K \to K: \quad x \mapsto x$$
$$D_2: K^2 \times K^2 \to K: \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Für $n \geq 3$ gehen wir induktiv vor, d.h. wir gehen davon aus, dass wir eine Determinantenform

$$D_{n-1}: \underbrace{K^{n-1} \times \ldots \times K^{n-1}}_{n-1} \to K$$

bereits konstruiert haben.

Wegen 4c ist D_{n-1} dann auch eindeutig bestimmt.

Wir setzen für $A = (a_{ij}) \in \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n} = K^{n \times n}$

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

Laplace-Entwicklung nach der i-ten Zeile

für beliebiges $i \in \{1, \dots, n\}$. Dabei ist

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A hervorgegangen.

b) Notation: Statt $D_n(A) = D_n((a_{ij}))$ schreiben wir auch $|a_{ij}|$ bzw $D_n(a_1, \dots, a_n)$ für $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Bsp: $K = \mathbb{R}$

Entwicklung nach 1. Zeile

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 \cdot (2 - 0) + 2(0 - 0)$$

$$= -2$$

c) Die Abb $D_n : K^{n \times n} \to K$ ist multilinear, alternierend und normiert.

(6) a) <u>Def</u>: Die Abb. $\det = D_n : K^{n\times n} \to K$ heißt die <u>Determinante</u> auf K^n.

b) <u>Prop</u>: Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

c) <u>Prop</u>: Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt

i) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

ii) Falls A invertierbar, gilt $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

<u>Bew zu ii)</u> $1 = \det(I_n) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ □

d) Sei $A \in K^{n\times n}$. Äquivalent sind:

i) $A \in GL_n(K)$ (d.h. A ist invertierbar)

ii) $\det(A) \neq 0$

iii) $\forall b \in K^n$ ist das lineare GLS $Ax = b$ <u>eindeutig</u> lösbar.

iv) Die Spalten von A sind lin. unabhängig.

v) Die Zeilen von A sind lin. unabhängig.

vi) $\operatorname{rank} A = n$.

e) <u>Def</u>: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen <u>ähnlich</u>, falls ein $S \in GL_n(K)$ existiert mit $B = S^{-1}AS$.

<u>Prop</u>: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

<u>Bew</u>:
$$\det(B) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A)$$ □

Diese Beobachtung erlaubt es, einem bel. linearen Endomorphismus

$$\varphi : K^n \to K^n$$

seine <u>Determinante</u> zuzuordnen:

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ beliebige Basen von K^n. Dann ex. $S \in GL_n(K)$ mit [vgl. 3.12, c)]

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = S^{-1} [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S$$

$\Rightarrow \det(\varphi) := \det [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist wohldefiniert.

(7) <u>Satz</u> (<u>Leibnizformel</u>)

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Es gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Sym\{1,\dots,n\}} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Permutation von $\{1, \dots, n\}$

$sgn(\sigma) = \# \underset{i<j}{(i,j)}$ mit $\sigma(i) > \sigma(j)$ (Zahlen i,j sind nicht richtig sortiert)

<u>Bsp:</u> $(3, 1, 2, 4)$

$(3,1), (3,2) \Rightarrow sgn(\sigma) = 2$

<u>Bew:</u> ÜA

(8) a) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ eine <u>obere Dreiecksmatrix</u>, d.h. $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

Dann gilt $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

b) Wegen $\det(A^T) = \det(A)$ gilt dieselbe Aussage auch für untere Dreiecksmatrizen.

c) Sei $A \in K^{n \times n}$ beliebig. Der Gauß-Jordan-Algorithmus formt A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen zu einer Matrix B in Zeilenstufenform um. Eine Matrix in Zeilenstufenform ist eine obere Dreiecksmatrix.

Die elementaren Zeilenoperationen entsprechen der Multiplikation mit Matrizen von links, vgl. 3.10, d):

(E1) $A' = L'A$, wobei $L' = I_n + \lambda E_{ji}$, $i \neq j$.

Es gilt $\det(L') = 1$.

Addition von $\lambda \cdot i$. Zeile zur j. Zeile

(E2) $A' = L'A$, wobei

$$\begin{array}{cc} L' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \qquad\qquad & \uparrow \; i & \; \uparrow \; j \end{array} & \end{array}$$

Vertauschung von Zeilen

Es gilt $\det(L') = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

(E3) $A' = L'A$, wobei

$$L' = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\lambda}, 1, \ldots, 1), \; \lambda \neq 0.$$

Multiplikation der i. Zeile mit λ

Es gilt $\det(L') = \lambda$.

Um eine Zeilenstufenform zu erreichen, genügen die Operationen (E1) und (E2)

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) \cdot (-1)^t$,

wobei t die Anzahl der Anwendungen von (E2) ist.

d) <u>Bsp:</u> $K = \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{(E1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(E1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{(E1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2+3i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow (-1)^t = 1$

$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2+3i) = -2+3i$

§ 5 Euklidische und unitäre Vektorräume

(1) Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-VR.

<u>Def</u>: a) Eine Abb. $f: V \times V \to K$ heißt <u>K-Bilinearform</u>, falls gilt

$\forall \alpha, \beta \in K \ \forall u, u', v, v' \in V$:

(B) $f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u,v) + \beta f(u', v)$
und $f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u,v) + \beta f(u, v')$.

b) Die K-Bilinearform f heißt <u>ausgeartet</u>, falls ex. $u \neq 0$ mit der Eigenschaft, dass $\forall v \in V$: $f(u,v) = 0$.

<u>Bsp</u>: $V = K^d$. Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$

setze $f(u,v) = u^T v = u_1 v_1 + \ldots + u_d v_d$.

<u>Standardskalarprodukt</u>

(f ist bilinear und nicht ausgeartet.)

<u>Bem</u>: Das Standardskalarprodukt ist

(S) <u>symmetrisch</u>, d.h. $\forall u, v \in V: f(u,v) = f(v,u)$.

(2) a) <u>Def</u>: Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt das Standardskalarprodukt auch <u>Euklidisches Skalarprodukt</u>.

· <u>Notation</u>: $\langle u, v \rangle := u^T v = u_1 v_1 + \ldots + u_d v_d$

b) <u>Prop:</u> Das euklidische Skalarprodukt ist $\mathbb{R}$-bilinear, symmetrisch und <u>positiv definit</u>, d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^d$ gilt (zusätzlich zu (B) und (S)):

$$(P)\begin{cases} i) & \langle v, v\rangle \geq 0 \\ ii) & \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \end{cases}$$

c) <u>Def:</u> Die <u>euklidische Norm</u> (<u>Länge</u>) eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ wird definiert als

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_d^2}.$$

(3) a) <u>Bsp:</u> Sei $f: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to$ das Standard-skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$. Dann gilt

$$f((1,i),(1,i)) = 1^2 + i^2 = 0.$$

Daher ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ keine geeignete Erweiterung des euklidischen Skalarprodukts auf komplexe Vektorräume.

b) Auf den komplexen Zahlen ist die Konjugation

$$\overline{}: z = x + iy \longmapsto \overline{z} := x - iy$$

ein Körperautomorphismus mit der Eigenschaft $\overline{(\overline{z})} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.