



11. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 42

(3 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } 0 \leq x \leq 10, \\ \frac{1}{10} - \alpha & \text{für } 10 < x \leq 20, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 20 \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Um den Parameter $\alpha \in [0, \frac{1}{10}]$ der Dichte von X zu schätzen, notiert sich Student S., dass Dozent K. bei den letzten $n = 5$ Vorlesungen

$$x_1 = 5 \text{ bzw. } x_2 = 12 \text{ bzw. } x_3 = 3 \text{ bzw. } x_4 = 7 \text{ bzw. } x_5 = 19$$

Minuten zu früh kam.

- a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^5 f_{\alpha}(x_i), \quad (\alpha \in [0, \frac{1}{10}]).$$

- b) Bestimmen Sie – ausgehend von den angegebenen Werten von x_1, \dots, x_5 – die zugehörige Maximum-Likelihood-Schätzung von α .
- c) Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_{α} . Zeigen Sie: Der Schätzer

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{10 \cdot n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,10]}(X_i)$$

mit

$$1_{[0,10]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 10, \end{cases}$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für α .

- d) Ist der Schätzer in c) auch stark konsistent? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 43

(3 Punkte)

Bei der Shell Jugendstudie 2006 wurden 1231 Mädchen befragt. Dabei gaben 55 Prozent der befragten Mädchen an, das Abitur anzustreben. Leiten Sie aus dem zentralen Grenzwertsatz ein approximatives Konfidenzintervall $[u, 1]$ zum Konfidenzniveau 0.95 für den Anteil der Mädchen her, die das Abitur anstreben.

Aufgabe 44

(3 Punkte)

Ein Autohersteller behauptet, dass der Benzinverbrauch für einen neuentwickelten Typ im Mittel 6 Liter pro 100km beträgt. Dabei kann er davon ausgehen, dass der Verbrauch normalverteilt ist mit der Standardabweichung $\sigma = 0.3$.

a) Eine Verbraucherzentrale vermutet, dass der Hersteller einen zu niedrigen Mittelwert μ angegeben hat. Sie überprüft deshalb 20 Autos des neuen Typs auf ihren Verbrauch und berechnet aus diesen Werten das arithmetische Mittel $\bar{x} = 6.1$. Kann man hiermit die Behauptung des Herstellers widerlegen ?

b) Eine Autozeitschrift bekommt von 152 Käufern des neuen Typs Beschwerden über den zu hohen Verbrauch zugesandt. Sie errechnet aus diesen Werten das arithmetische Mittel $\bar{x} = 7.3$. Kann man hiermit die Behauptung des Herstellers widerlegen ?

Aufgabe 45

(3 Punkte)

In einer Studie wurde die Pulsfrequenz von 53 8-9-jährigen Jungen gemessen. Es ergab sich eine mittlere Pulsfrequenz von 86,7 Schlägen / Minute. Langjährige Erfahrungen haben gezeigt, dass die Pulsfrequenz normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma = 10,3$ Schläge / Minute. Zu testen ist die Hypothese $H_0 : \mu \geq 90$ gegen $H_1 : \mu < 90$.

In der Praxis gibt man zur Beurteilung der Signifikanz der Daten häufig den sogenannten *p-Wert* der Daten an, d.h., das kleinste Fehlerlevel α , mit dem man die Nullhypothese noch ablehnen kann. Berechnen Sie zu den obigen Daten den p-Wert, und interpretieren Sie das Ergebnis.

Einige Werte der Verteilungsfunktion (Φ) der Standardnormalverteilung:

x	0	0.13	0.26	0.42	0.53	0.85	1.29	1.65	1.96	2.33	2.58
$\Phi(x)$	0.5	0.55	0.6	0.66	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995