Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09
6.7.2009

10. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 38 (3 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch auf $[\theta, 2\theta]$ gleichverteilt, d.h. sie sind unabhängig und besitzen (jeweils) eine Dichte $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{für} \quad \theta \le x \le 2\theta, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin [\theta, 2\theta]. \end{cases}$$

Hierbei ist $\theta \in \mathbb{R}_+$ ein Parameter der Dichte f_θ.

(a) Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{2}{3 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(b) Ist der Schätzer in a) auch stark konsistent ? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 39 (3 Punkte)

Die zufällige Lebensdauer einer Leuchtstoffröhre hängt nicht von der gesamten Brenndauer, sondern nur von der Anzahl der Ein– und Ausschaltvorgänge ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Röhre beim k–ten Einschaltvorgang ausfällt, sei $p^{k-1} \cdot (1-p)$ $(k \in \mathbb{N})$, wobei der Parameter $p \in (0,1)$ als Maß für die Güte der Röhre angesehen werden kann.

In einer Glühlampenfabrik wird die Qualität der produzierten Röhren dadurch kontrolliert, dass n Röhren unabhängig voneinander durch Relais ständig ein– und ausgeschaltet werden. Dabei wird registriert, wann die einzelnen Röhren ausfallen. Das Ergebnis dieser Versuche sei $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, d.h. die i–te Röhre ist beim k_i–ten Einschaltvorgang ausgefallen.

Bestimmen Sie durch Anwendung des Maximum–Likelihood–Prinzips eine Schätzung des Parameters p ausgehend von $k_1, \ldots, k_n$.

Aufgabe 40 (3 Punkte)

Ein Flugunternehmen möchte die zufällige Anzahl X der Personen, die nach Erwerb eines Flugtickets nicht (rechtzeitig) zum Abflug erscheinen, stochastisch modellieren. Nimmt man an, dass bei $n = 240$ verkauften Flugtickets jede einzelne Person, die ein Flugticket erworben hat, unbeeinflusst von den anderen Käufern der Flugtickets mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ nicht zum Abflug erscheint, so ist die zufällige Zahl X der nicht zum Abflug erscheinenden Personen binomialverteilt mit Parametern $n = 240$ und p, d.h.

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k \in \{0, 1, \ldots, n\}).$$

Bei den letzten zehn Abflügen sind

$$x_1 = 10, x_2 = 6, x_3 = 15, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 5, x_7 = 6, x_8 = 16, x_9 = 11, x_{10} = 3$$

der jeweils $n = 240$ Personen, die ein Flugticket gekauft hatten, nicht zum Abflug erschienen. Konstruieren Sie mit Hilfe des Maximum-Likelihood-Prinzips ausgehend von diesen Daten eine Schätzung von p.

Aufgabe 41 (3 Punkte)

Wirtschaftswissenschaftler W. möchte die Dauer von Arbeitslosigkeit stochastisch modellieren. Dazu beschreibt er sie durch eine $\exp(\lambda)$–Verteilung, d.h. durch eine Verteilung, die eine Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ besitzt mit

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{für} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Um den unbekannten Parameter $\lambda > 0$ zu schätzen, lässt er sich vom Arbeitsamt für vier zufällig herausgegriffene Arbeitslose ermittelten, dass diese genau $x_1 = 12$ bzw. $x_2 = 2$ bzw. $x_3 = 18$ bzw. $x_4 = 8$ Monate nach Verlust ihres bisherigen Arbeitsplatzes eine neue Arbeitsstelle gefunden haben.

(a) Konstruieren Sie den Maximum–Likelihood–Schätzer für λ und geben Sie an, was man im Falle der obigen Stichprobe als Schätzung für λ erhält.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

ein stark konsistenter Schätzer für λ ist.