Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
24. Juni 2009

9. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 34 (3 Punkte)

Zehn perfekten Schützen stehen zehn unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl der überlebenden Enten. In der Vorlesung wurde unter Verwendung der Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{Ente } i \text{ überlebt,} \\ 0 & \text{Ente } i \text{ nicht überlebt,} \end{cases}$$

der Erwartungswert von X bestimmt als

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{E}\left\{X_i\right\} = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 3.49.$$

Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Resultats die Varianz von X.

Aufgabe 35 (3 Punkte)

Ein Glücksrad bleibt nach dem Drehen rein zufällig auf einem von insgesamt 50 Feldern stehen. Bleibt es auf einem der 10 blau gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 5 Euro ausgezahlt. Bleibt es auf einem der 5 grün gefärbten Felder stehen, so wird ein Gewinn von 10 Euro ausgezahlt. Und bleibt es auf dem *einzigen* roten Feld stehen, so wird ein Gewinn von 100 Euro ausgezahlt. Auf den übrigen 34 weiß gefärbten Feldern wird kein Gewinn ausgezahlt.

(a) Wie groß ist der Gewinn “im Mittel”, und wie groß ist die “mittlere quadratische Abweichung” zwischen dem zufälligen Gewinn und dem Gewinn “im Mittel” ?

(b) Für einmaliges Drehen verlangt der Besitzer des Glücksrads einen Einsatz von 5 Euro. Damit beträgt sein Verdienst bei einmaligen Drehen $Y = 5 - X$, wobei X der ausgezahlte Gewinn ist. Wie groß ist sein Verdienst “im Mittel”, und wie groß ist die “mittlere quadratische Abweichung” zwischen dem zufälligen Verdienst und dem Verdienst “im Mittel”?

(c) Der Besitzer betreibt sein Glücksrad einen Monat lang auf einem Jahrmarkt. In dieser Zeit drehen dabei $n = 6000$ Personen (unbeeinflusst voneinander) am Glücksrad. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes eine untere Schranke für den Verdienst des Besitzers in diesem Monat, die (ungefähr) mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschritten wird.

Hinweise: Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}_{Y_i} = \mathbf{P}_Y$ $(i = 1, \ldots, n)$, wobei Y die in b) eingeführte ZV ist. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes $x \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\mathbf{P}[\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq x] \approx 0.95.$$

Aufgabe 36 (3 Punkte)

Ein Eremit am Südpol hat sich für die einbrechende polare Nacht mit 24 Glühbirnen eingedeckt. Da er sich im Dunkeln unwohl fühlt, will er, dass zu jeder Zeit des halben Nachtjahres eine Birne brennt. Sollte die aktuelle Birne durchbrennen, wird er sie sofort auswechseln. Die polare Nacht dauert 4400 Stunden und der Hersteller der Glühbirnen hat eine exponentialverteilte Haltbarkeit seiner Produkte mit Parameter $\lambda = 1/200$ zugesichert. Während der Eremit die erste Birne einschraubt, beginnen Zweifel an ihm zu nagen...

(a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Haltbarkeit einer solchen Glühbirne.

(b) Sei X_i Zufallsvariable, die die Lebensdauer der i-ten Birne beschreibt. Dann ist

$$Z := \sum_{i=1}^{24} X_i$$

die Zufallsvariable, die den Zeitpunkt beschreibt, an dem die letzte Birne durchbrennt. Bestimmen Sie auch hiervon Erwartungswert und Varianz.

(c) Brennend interessiert den Eremiten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm vor Ende der Polarnacht die Glühbirnen ausgehen könnten. Berechnen Sie diese näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz.

Aufgabe 37 (3 Punkte)

Ein Flugunternehmen weiß aus Erfahrung, dass im Mittel 7% derjenigen Personen, die ein Flugticket erworben haben, nicht bzw. zu spät zum Abflug erscheinen. Um die Zahl der somit ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen Flug, bei dem 240 Plätze zu Verfügung stehen, mehr als 240 Flugtickets verkauft.

Wieviele Flugscheine dürfen höchstens verkauft werden, dass mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.99 alle rechtzeitig zum Abflug erscheinenden Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen ?

Hinweis Betrachten Sie unabhängige $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Dabei gelte $X_i = 1$ genau dann, falls die Person, die das i-te Flugticket gekauft hat, (rechtzeitig) zum Abflug erscheint und n ist die Anzahl der verkauften Flugtickets. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise dass größte $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 240\right] \geq 0.99.$$

Einige Werte der Verteilungsfunktion (Φ) der Standardnormalverteilung:

x	0	0.13	0.26	0.42	0.53	0.85	1.29	1.65	1.96	2.33	2.58
$\Phi(x)$	0.5	0.55	0.6	0.66	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995