Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
17. Juni 2009

8. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Als Spieler hat man u.A. die Möglichkeiten: Setzen auf Rot und setzen auf Ungerade. In beiden Fällen erhält man im Erfolgsfall (d.h. eine rote Zahl bzw. eine ungerade Zahl wird ausgewählt) den doppelten Einsatz. Im Falle einer schwarzen Zahl bzw. einer geraden Zahl, die nicht Null ist, verliert man den eingesetzten Betrag. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

(a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

(b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert und eine Zufallsvariable Y, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz einer Geldeinheit auf Ungerade modelliert.

(c) Bestimmen Sie die Varianz der beiden folgenden Spielstrategien:

i. Setzen von zwei Geldeinheiten auf Rot.

ii. Setzen von einer Geldeinheit auf Rot und einer Geldeinheit auf Ungerade.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1-x) & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

sei Dichte einer Zufallsvariablen Y. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{10-x}{45} & 1 < x \leq 10, \\ 0 & x < 0 \text{ oder } x > 10. \end{cases}$$

(a) Wie groß ist der "mittlere" zukünftige Erlös, und wie groß ist die "mittlere" quadratische Abweichung zwischen dem zukünftigen Erlös und diesem Wert ?

(b) In der Bilanz des Unternehmens kann der heutige Wert der Investition eines Euros in den Immobilienfond berücksichtigt werden durch den *Value at Risk*, d.h. durch denjenigen Wert, den der zukünftige Erlös genau mit Wahrscheinlichkeit 0.95 überschreitet. Bestimmen Sie diesen Wert.

(c) Statt dem Value at Risk wird nun der Wert 0.8 in der Bilanz des Unternehmens zur Beschreibung des heutigen Wertes der Investition eines Euros in den Immobilienfond verwendet. Um eine Aussage darüber zu bekommen, wie stark dieser Wert im Mittel unterschritten wird, falls der Fall eintritt, dass er wirklich unterschritten wird, kann der sogenannte *expected shortfall* berechnet werden. Dies ist der mittlere Wert von X der sich ergibt, falls 0.8 unterschritten wird. Dieser Wert kann berechnet werden gemäß

$$\frac{\mathbf{E}\left[X \cdot 1_{[X<0.8]}\right]}{\mathbf{P}[X < 0.8]} := \frac{\mathbf{E}h(X)}{\mathbf{P}[X < 0.8]}$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist gemäß

$$h(x) = \begin{cases} x & x < 0.8, \\ 0 & x \geq 0.8. \end{cases}$$

Berechnen Sie diesen Wert.

Aufgabe 33 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Zeigen Sie: Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] < \infty$$

für jedes $\varepsilon > 0$ folgt

$$X_n \to X \qquad f.s.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Borel-Cantelli.