Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
12. Juni 2009

# 7. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

**Aufgabe 26** (3 Punkte)

Eine Versicherung investiert einen Teil ihrer Rücklagen in einen Immobilienfond. Aus Erfahrung weiß die Versicherung, dass der für 1 Euro erzielte zukünftige Erlös beschrieben wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{9}{10} \cdot x^{-2} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die zur Dichte $f$ gehörende Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

(b) Berechnen Sie (Skizze von $F$ verwenden!) den Value at Risk, d.h. denjenigen Wert $VaR \in \mathbb{R}$, für den gilt

$$F(VaR) = 0.05.$$

(c) Interpretieren Sie den $VaR$ anschaulich.
**Hinweis:** Ist $X$ stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte $f$, was gilt dann für die Wahrscheinlichkeiten

$$P[X \leq VaR] \text{ bzw. } P[X > VaR]?$$

**Aufgabe 27** (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $A, B$ sind unabhängig, d.h. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(b) $1_A, 1_B$ sind unabhängig, d.h. für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ gilt

$$P[1_A \in C_1, 1_B \in C_2] = P[1_A \in C_1] \cdot P[1_B \in C_2].$$

**Hinweis:** Für $C_1 \in \mathcal{B}$ gilt immer

$$1_A^{-1}(C_1) \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Machen Sie sich damit klar, dass es genügt zu zeigen: Mit $A, B$ sind auch $A^c, B$ unabhängig. Verwenden Sie dazu

$$A^c \cap B = B \setminus (A \cap B).$$

**Aufgabe 28** (3 Punkte)

Bestimmen Sie den Erwartungswert eine $b(n,p)$-verteilten Zufallsvariablen $X$ und einer $\pi(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $Y$.

**Hinweis:** Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(p + (1-p))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

**Aufgabe 29** (3 Punkte)

An einem Flughafen wird für das Abstellen eines Autos für $x$ Minuten die Gebühr

$$h(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \leq x \leq 60 \\ \frac{x}{6} & \text{für } 60 < x < 600 \\ 800 & \text{für } x \geq 600 \end{cases}$$

verlangt. (Im Falle $x \geq 600$ wird das Auto abgeschleppt.)

Student S. holt seine Oma vom Flughafen ab. Dazu fährt er exakt zur geplanten Ankunftszeit des Flugzeugs in den Parkplatz ein. Leider hat das Flugzeug $X$ Minuten Verspätzung, wobei $X$ eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist. Daber erreicht er die Parkaufsicht, bei der er die Gebühr bezahlen muss, erst wieder nach $X + 30$ Minuten. Wie groß ist im Mittel die Gebühr, die Student S. bezahlen muss?

**Hinweis:** Berechnet werden soll

$$\mathbf{E}(h(X + 30))$$

wobei $X$ eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist.