Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09
18.5.2009

4. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 14 (3 Punkte)

In einem Café gibt es 3 verschiedene Sorten von Torten zur Auswahl. Eine Bestellung von 10 Stück Torte bestehe in der Angabe der Anzahl der von jeder Torte bestellten Stücke. Wieviele verschiedene Bestellungen gibt es für die 10 Stück Torte, falls von jeder Sorte mindestens ein Stück bestellt wird?

Hinweis: Die bestellten Tortenstücke werden nebeneinander aufgereiht, und zwar so, dass gleichartige Tortenstücke in einem (nichtleeren) Block zusammengefasst sind. Zur Markierung der Blockgrenzen denken Sie sich an den entsprechenden Stellen in den Zwischenräumen 2 Fähnchen plaziert. Wieviele Möglichkeiten gibt es dann für die Plazierungen dieser Fähnchen?

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Ein Zufallsgenerator erzeugt mit Ziffern aus $\{0, 1, ..., 9\}$ Ziffernblöcke der Länge 4. Geben Sie mit Begründung die Wahrscheinlichkeiten für folgende fünf Ereignisse an:

(a) alle Ziffern verschieden
(b) genau ein Paar gleicher Ziffern
(c) genau zwei Paare gleicher Ziffern
(d) genau drei gleiche Ziffern
(e) vier gleiche Ziffern

Berechnen Sie zur Kontrolle die Summe aller Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$ die Formel:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Aufgabe 17 (3 Punkte)

a) (Erstes Lemma von Borel und Cantelli)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \ \ (N \in \mathbb{N})$$

und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit rechts mit Hilfe der σ-Subadditivität ab.

b) Dozent K. fragt in jeder seiner mündlichen Prüfungen nach dem ersten Lemma von Borel und Cantelli. Da die Studenten sich untereinander absprechen, kann der n-te Prüfling die Frage nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^2}$ nicht richtig beantworten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei sukzessiver Durchführung von unendlich vielen Prüfungen nur endlich viele der Prüflinge diese Frage nicht richtig beantworten?
Hinweis: Wenden Sie a) mit A_n="Prüfling n beantwortet die Frage nicht richtig" an.