Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
24. Juni 2009

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Lösung zur Aufgabe 34 (3 Punkte)

Es gilt

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2.$$

Da wir $\mathbf{E}X$ schon kennen, genügt es also $\mathbf{E}(X^2)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} X_i X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{E}(X_iX_j) + \sum_{j=i+1}^{10}\mathbf{E}(X_iX_j)\right) + \sum_{i=1}^{10}\mathbf{E}(X_i^2) \\
&= 90\cdot\mathbf{E}(X_1X_2) + 10\cdot\mathbf{E}(X_1^2).
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das ein fest gewählter Schütze weder auf die erste noch auf die zweite Ente zielt ist $\frac{8}{10}$. Da die Schützen sich unabhängig voneinander entscheiden, auf welche Ente sie zielen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{10}$$

für das Ereignis „Keiner der Schützen zielt auf Ente 1 oder Ente 2 “ .

$$\mathbf{E}(X_1X_2) = 1\cdot\mathbf{P}[X_1\cdot X_2 = 1] = \left(\frac{8}{10}\right)^{10}.$$

Da X_1 nur die Werte Eins und Null annimmt, ist $\mathbf{E}(X_1^2) = \mathbf{E}(X_1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Wir erhalten also

$$\mathbf{V}(X) = 90\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^{10} + 10\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{10} - \left(10\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)^2 \approx 0.99.$$

Lösung zur Aufgabe 35 (3 Punkte)

(a) Als zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum betrachten wir $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ mit

$$\Omega = \{\text{weiß, blau, grün, rot}\}$$

und

$$P(A) = \frac{17}{25}\cdot 1_A(\text{weiß}) + \frac{1}{5}\cdot 1_A(\text{blau}) + \frac{1}{10}\cdot 1_A(\text{grün}) + \frac{1}{50}\cdot 1_A(\text{rot}).$$

Als nächstes definieren wir die Zufallsvariable X, die den Gewinn in Euro bei dem beschriebenen Glücksradspiel beschreibt. Man erhält

ω	weiß	blau	grün	rot
$X(\omega)$	0	5	10	100
$P(X \in \{\omega\})$	$\frac{17}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$

Der Gewinn im Mittel ist dann gerade der Erwartungswert der Zufallsvariable X, bei der mittleren quadratischen Abweichung handelt es sich um die Varianz.

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 5 \cdot P(X=5) + 10 \cdot P(X=10) + 100 \cdot P(X=100) \\
&= 5 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{10} + 100 \cdot \frac{1}{50} = 4 \\
E(X^2) &= 0^2 \cdot P(X=0) + 5^2 \cdot P(X=5) + 10^2 \cdot P(X=10) + 100^2 \cdot P(X=100) \\
&= 25 \cdot \frac{1}{5} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 100^2 \cdot \frac{1}{50} = 215 \\
V(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = 215 - 4^2 = 199
\end{aligned}$$

(b) Die Zufallsvariable X aus der Aufgabenstellung entspricht der Zufallsvariabe X aus der Lösung von Aufgabenteil a).

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(5-X) = E(5) - E(X) = 5 - 4 = 1 \\
V(Y) &= V(5-X) = V(-X) = V(X) = 199
\end{aligned}$$

(c) Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der selben Verteilung wie Y aus Aufgabenteil b). Nach der Aufgabenstellung ist $n = 6000$. Der Gewinn, den der Glückradbetreiber in dem Monat macht wird beschrieben durch

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Wir such jetzt eine Zahl x mit

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq x\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i > x\right) \approx 0.95.$$

Dies ist äquivalent mit

$$1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x\right) \approx 0.95.$$

Wir wollen nun $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ so transformieren, dass wir den zentralen Grenzwertsatz anwenden können.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} Y_i - n \cdot E(Y_1) \leq x - n \cdot E(Y_1) \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_1)) \leq x - n \cdot E(Y_1) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} \left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_1))\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} (x - n \cdot E(Y_1))
\end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz, ist die Zufallsvariable

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} \left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_1)) \right)$$

näherungsweise Normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
0.95 &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x \right) \\
&= 1 - P\left(\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} \left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_1)) \right) \leq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} (x - n \cdot E(Y_1)) \right) \\
&= 1 - P\left((Z \leq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} (x - n \cdot E(Y_1)) \right).
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$0.05 = P\left(Z \leq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} (x - n \cdot E(Y_1)) \right) = P(Z \leq -1.65).$$

Also ist

$$-1.65 = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{V(Y_1)}} (x - n \cdot E(Y_1))$$

und damit

$$x = -1.65 \cdot \sqrt{6000} \cdot \sqrt{199} + 6000 \approx 4197.04.$$

Der berechnete Wert von x ist die gesuchte untere Schranke für den Gewinn.

Lösung zur Aufgabe 36 (3 Punkte)

(a) Für den Erwartungswert und einer exponentialverteilten Zufallsvariablen Y mit Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \int_0^\infty x \cdot \lambda \exp(-\lambda \cdot x) \\
&= -x \cdot \exp(-\lambda x)|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dx \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_{x=0}^\infty = \frac{1}{\lambda} \\
\mathbf{E}(Y^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \exp(-\lambda \cdot x) \\
&= -x^2 \cdot \exp(-\lambda x)|_{x=0}^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x\lambda \cdot \exp(-\lambda x) dx \\
&= \frac{2}{\lambda^2} \\
\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Für die in der Aufgabenstellung definierte Zufallsvariable X erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 200 \\
\mathbf{V}X &= 200^2 = 40000
\end{aligned}$$

(b) Wir können davon ausgehen, dass die X_i unabhängig voneinander sind (dies spielt aber erst bei der Varianz eine Rolle). Nach dem ersten Aufgabenteil erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z) &= \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{24} X_i) = \sum_{i=1}^{24} \mathbf{E}(X_i) = 24 \cdot \mathbf{E}(X_1) = 24 \cdot 200 = 4800 \\ \mathbf{V}(Z) &= \mathbf{V}(\sum_{i=1}^{24} X_i) = \sum_{i=1}^{24} \mathbf{V}(X_i) = 24 \cdot \mathbf{V}(X_1) = 24 \cdot 200^2 = 960000\end{aligned}$$

(c) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsvariable

$$Y = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}X_1 \right)$$

näherungsweise $N(0,1)$-verteilt. Es folgt:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{24} X_i \leq 4400\right) \\ = \; &\mathbf{P}\left(\frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} X_i - 200 \leq \frac{1}{24} \cdot 4400 - 200\right) \\ = \; &\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{24}}{200}\left(\frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} X_i - 200\right) \leq \frac{\sqrt{24}}{200}\left(\frac{1}{24} \cdot 4400 - 200\right)\right) \\ = \; &\mathbf{P}\left(Y \leq 2 \cdot \sqrt{6}\left(\frac{11}{12} - 1\right)\right) \\ = \; &\mathbf{P}\left(Y \leq -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi(-\frac{1}{\sqrt{6}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx 1 - \Phi(0.42) = 0.34\end{aligned}$$

Mit Wahrscheinlichkeit 0.34 gehen also dem Eremiten während der Polarnacht die Glühbirnen aus.

Lösung zur Aufgabe 37 (3 Punkte)

Zur stochastischen Modellierung betrachten wir unabhängige $b(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Dabei gelte $X_i = 1$ genau dann, falls die Person, die das i-te Flugticket gekauft hat, (rechtzeitig) zum Abflug erscheint. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Käufer des i-ten Flugtickets (rechtzeitig) zum Abflug erscheint, ist $p = 1 - 0.07 = 0.93$, und n ist die Anzahl der verkauften Flugtickets. Dann gibt $\sum_{i=1}^{n} X_i$ die Anzahl der zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, an, und damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen, gegeben durch

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 240\right].$$

Gesucht ist dass größte $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 240\right] \geq 0.99.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le 240\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \ \mathbf{E}X_1 \le \frac{240}{n} - \ \mathbf{E}X_1\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}X_1\right) \le \frac{240 - n\cdot\mathbf{E}X_1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{V(X_1)}}\right].
\end{aligned}$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz stimmt die letzte Wahrscheinlichkeit approximativ mit

$$\Phi\left(\frac{240 - n\cdot\mathbf{E}X_1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{V(X_1)}}\right)$$

überein, wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0,1)$-Verteilung ist.
Mit

$$\mathbf{E}X_1 = p,\ V(X_1) = p(1-p) \text{ und } p = 0.93$$

folgt, dass die obige Bedingung approximativ äquivalent ist zu

$$\Phi\left(\frac{240 - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}\right) \ge 0.99.$$

Wegen $\Phi(2.4) \approx 0.99$ und der Monotonie von Φ ist dies wiederum genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\frac{240 - n\cdot p}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}} \ge 2.4$$

Quadrieren der letzten Ungleichung liefert die notwendige Bedingung

$$\frac{(240 - n\cdot p)^2}{n\cdot p\cdot(1-p)} \ge 2.4^2 \tag{1}$$

Diese impliziert aber nur dann die vorige Bedingung, wenn gleichzeitig

$$240 - n\cdot p \ge 0,\ \text{ d.h. } n \le \frac{240}{p} = \frac{240}{0.93} \approx 258.1 \tag{2}$$

gilt.
Ungleichung (1) führt auf

$$(240 - n\cdot p)^2 \ge 2.4^2 n\cdot p\cdot(1-p)$$

bzw. auf

$$240^2 - (480p + 2.4^2 p\cdot(1-p))\cdot n + p^2 n^2 \ge 0.$$

Bestimmt man die Nullstellen des quadratischen Polynoms auf der linken Seite, so erhält man

$$n_1 \approx 247.7 \text{ und } n_2 \approx 268.8$$

Also ist die obige Ungleichung erfüllt für $n \le 247$ oder $n \ge 269$.
Unter Berücksichtigung von $n \le 258.1$ (vgl. (2)) erhält man als Resultat: Es dürfen höchstens 247 Flugtickets verkauft werden, damit mit Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0.99 alle rechtzeitig zum Abflug erschienenen Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen.