Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2009
29. Juni 2009

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Lösung zur Aufgabe 30 (3 Punkte)

(a) Es handelt sich um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A}{37}.$$

(b)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,11,13,15,17,20,22,24,26,28,29,31,33,35\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

(c) Sei $Z = X + Y$. Gesucht ist also $Var(2X)$ und $Var(Z)$. Es gilt

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,19,21,23,25,27\} \\ 0 & \text{falls } \omega \in \{11,12,13,14,15,16,,17,18,29,30,31,32,33,34,35,36\} \\ -1 & \text{falls } \omega \in \{0\} \\ -2 & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,20,22,24,26,28\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= -1 \cdot P[X=-1] - \frac{1}{2}P[X=-\frac{1}{2}] + 1 \cdot P[X=1] = -\frac{1}{2 \cdot 37} = -\frac{1}{74} \\
Var(X) &= E(|X - EX|^2) \\
&= (-1 - \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=-1] + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=-\frac{1}{2}] + (1 - \frac{1}{74})^2 \cdot P[X=1] \\
&= \frac{1341}{1369} \approx 0.9795 \\
Var(2X) &= 4 \cdot \frac{1341}{1369} \approx 3.9182 \\
E(Z) &= E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -\frac{1}{37} \\
E(Z^2) &= 4 \cdot P(Z=2) + P(Z=0) + 4 \cdot P(Z=-2) = 4 \cdot \frac{10}{37} + \frac{1}{37} + 4 \cdot \frac{10}{37} = \frac{81}{37} \\
Var(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{81}{37} - \frac{1}{37^2} \approx 2.19
\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 31 (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \int x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx \\
&= \int_0^1 6x^2dx - \int_0^1 6x^3dx = 2x^3\Big|_{x=0}^1 - \frac{3}{2}x^4\Big|_{x=0}^1 \\
&= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathbf{E}(Y^2) &= \int x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx \\
&= \int_0^1 6x^3dx - \int_0^1 6x^4dx = \frac{3}{2}x^4\Big|_{x=0}^1 - \frac{6}{5}x^5\Big|_{x=0}^1 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{10} \\
\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}\left((Y-\mathbf{E}Y)^2\right) = \mathbf{E}\left(Y^2 - 2Y\mathbf{E}Y + (\mathbf{E}Y)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(Y^2\right) - 2\left(\mathbf{E}Y\right)^2 + (\mathbf{E}Y)^2 = \mathbf{E}\left(Y^2\right) - (\mathbf{E}Y)^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

Lösung zur Aufgabe 32 (3 Punkte)

(a) Der mittlere Erlös ist der Erwartungswert, die mittlere quadratische Abweichung ist die Varianz der Zufallsvariable.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int x \cdot f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{10}x^3dx + \int_1^{10} \frac{10x - x^2}{45}dx \\
&= \frac{3}{10 \cdot 4}x^4\Big|_{x=0}^1 + \frac{5x^2 - \frac{1}{3}x^3}{45}\Bigg|_{x=1}^{10} \\
&= \frac{3}{40} + \frac{500 - \frac{1}{3}\cdot 1000 - 5 + \frac{1}{3}}{45} \\
&= \frac{3}{40} + \frac{162}{45} = \frac{3}{40} - \frac{18}{5} = \frac{147}{40} \\
\mathbf{E}(X^2) &= \int x^2 \cdot f(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{3}{10}x^4dx + \int_1^{10} \frac{10x^2 - x^3}{45}dx \\
&= \frac{1851}{100} \\
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1851}{100} - \left(\frac{147}{40}\right)^2 = \frac{8007}{1600}
\end{aligned}
$$

(b) Für den Value at Risk VaR gilt

$$P[X > VaR] = 0.95.$$

Dies ist äquivalent mit

$$F(VaR) = P[X \leq VaR] = \frac{1}{20}.$$

Für $0 < t < 1$ gilt

$$F(t) = \int_0^t \frac{3}{10} x^2 dx = \frac{1}{10} x^3$$

und wegen $F(0) = 0 < \frac{1}{20} < \frac{1}{10} = F(1)$ gilt für den VaR:

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} &= \frac{1}{10}(VaR)^3 \\ \Leftrightarrow \quad VaR &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.8 \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\mathbf{E}[X \cdot 1_{\{X<0.8\}}]}{\mathbf{P}[X < 0.8]} = 20 \cdot \int_0^{0.8} x \cdot f(x) dx = 20 \cdot 0.03072 = 0.6144.$$

Lösung zur Aufgabe 33 (3 Punkte)

Für $l \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[|X_n - X| > \frac{1}{l}\right] < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli folgt daraus

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} \\ &\geq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Das zum Ereignis in obiger Wahrscheinlichkeit komplementäre Ereignis

$$A := \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left[|X_k - X| > \frac{1}{l}\right]\right)^c$$

hat also Wahrscheinlichkeit Eins. Nach der Regel von de Morgan gilt

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left[|X_k - X| \leq \frac{1}{l}\right].$$

Wir zeigen nun, dass für $\omega \in A$ die Beziehung

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Dazu beachten wir, dass für $\omega \in A$ für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{l} \text{ für } k \text{ genügend groß}$$

erfüllt ist, was

$$\limsup_{k\to\infty} |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{l}$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$ bzw.

$$\limsup_{k\to\infty} |X_k(\omega) - X(\omega)| = 0$$

impliziert. Damit haben wir

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \qquad (n \to \infty)$$

für $\omega \in A$, woraus wegen $\mathbf{P}(A) = 1$ die Behauptung folgt.