Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
22. Juni 2009

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Lösung zur Aufgabe 26 (3 Punkte)

(a) Für $x < 0$ ist $F(x) = 0$. Falls $0 \leq x \leq 1$ erhalten wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{t}{5} dt = \frac{1}{10} \cdot x^2.$$

Für den Fall $x > 1$ erhält man entsprechend

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = 1 - \frac{9}{10x}.$$

Insgesamt ergibt dies:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < 0 \\ \frac{1}{10}x^2 & \text{, falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{9}{10 \cdot x} & \end{cases}$$

(b) In der Skizze sieht man, dass aus $F(VaR) = 0,05$ folgt, dass $0 \leq VaR \leq 1$. Somit

$$\begin{aligned} F(VaR) &= \frac{VaR^2}{10} \stackrel{!}{=} 0,05 \\ &\Rightarrow \quad VaR^2 = 0,5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also $VaR = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Es gilt

$$P[X \leq VaR] = \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{u}{5} du = \frac{u^2}{10} \bigg|_{u=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1/2}{10} = \frac{1}{20} \mathrel{\widehat{=}} 5\%$$

$$\Rightarrow P[X > VaR] = 1 - P(X \leq VaR) = \frac{15}{20} \mathrel{\widehat{=}} 95\%.$$

Anschaulich ist VaR somit der Wert, der mit 95 % Wahrscheinlichkeit überschritten wird.

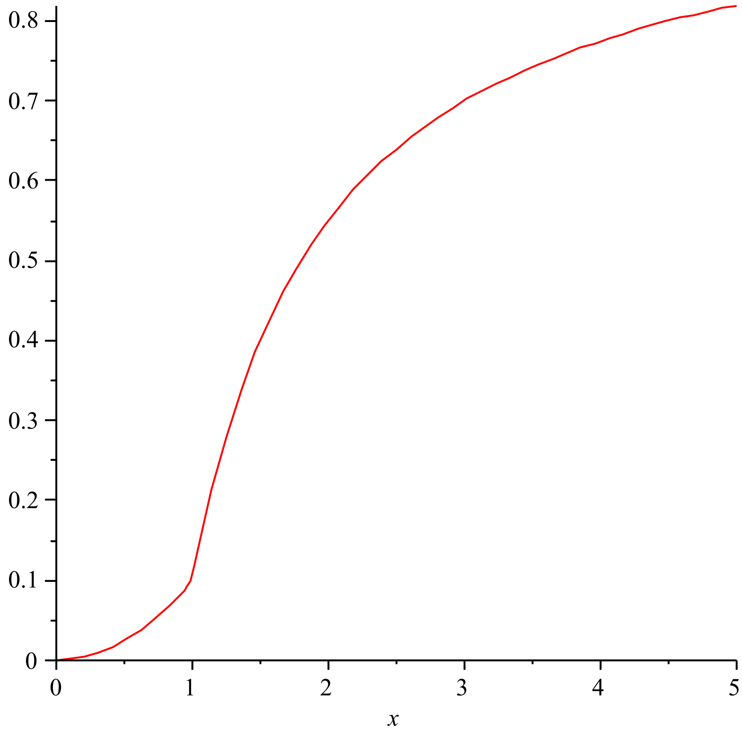

Abbildung 1: Abbildung zur Lösung von Aufgabe 26 a).

Lösung zur Aufgabe 27 (3 Punkte)

Sind $1_A, 1_B$ unabhängig, so folgt:

$$P[A,B] = P[1_A \in \{1\}, 1_B \in \{1\}] \stackrel{Vor.}{=} P[1_A \in \{1\}] \cdot P[1_B \in \{1\}] = P[A] \cdot P[B].$$

Sei jetzt A, B unabhängig. Für Mengen $C \in \mathcal{A}, D \in \mathcal{B}$ gilt:

$$1_C^{-1}(D) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 0,1 \notin D \\ C & \text{falls } 1 \in D, 0 \notin D \\ C^c & \text{für } 0 \in D, 1 \notin D \\ \Omega & \text{für } 0,1 \in D \end{cases}$$

und somit $1_C^{-1}(D) \in \{\emptyset, C, C^c, \Omega\}$.
Für $1_A^{-1}(C_1) \in \{\emptyset, \Omega\}$ oder $1_B^{-1}(C_2) \in \{\emptyset, \Omega\}$ ist die Behauptung trivial. Denn gilt beispielsweise $1_A(C_1)^{-1} = \Omega$, so folgt

$$\begin{aligned} P[1_A \in C_1, 1_B \in C_2] &= P[\Omega \cap B^{-1}(C_2)] = P[B^{-1}(C_2)] \\ &= 1 \cdot P[1_B \in C_2] = P(\Omega) \cdot P[1_B \in C_2] = P[1_A \in C_1] \cdot P[1_B \in C_2]. \end{aligned}$$

Wegen $A^c \cap B = B \setminus (A \cap B)$ folgt zunächst

$$\begin{aligned} P[A^c \cap B] &= P[B \setminus (A \cap B)] = P[B] - P[A \cap B] \\ &\stackrel{\text{A,B unabhängig}}{=} P[B] - P[A] \cdot P[B] = P[B] \cdot (1 - P[A]) = P[B] \cdot P[A^c]. \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigketi von A, B folgt also die Unabhängigkeit von A^c, B und aus Symmetriegründen die Unabhängigkeit von A, B^c. Ist aber A, B^c unabhängig folgt jetzt unmittelbar, dass auch A^c, B^c unabhängig ist.

Durch Abarbeiten der verbleibenden Möglichkeiten folgt daraus die Behauptung. Exemplarisch zeigen wir hier den Fall $1_A^{-1}(C_1) = A^c, 1_B^{-1}(C_2) = B^c$:

$$\begin{aligned} P[1_A \in C_1, 1_B \in C_2] &= P[1_A^{-1}(C_1), 1_B^{-1}(C_2)] = P[A^c, B^c] \overset{s.o.}{=} P[A^c] \cdot P[B^c] \\ &= P[1_A^{-1}(C_1)] \cdot P[1_B^{-1}(C_2)] = P[1_A \in C_1] \cdot P[1_B \in C_2]. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 28 (3 Punkte)

Für $k > 0$ gilt

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Da X eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{, falls } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ist, gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= = np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariabel Y hat die Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) & \text{, falls } 0 \le k \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \\ &= \exp(-\lambda)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 29 (3 Punkte)

Es gilt

$$h(x+30) = \begin{cases} 10 & \text{, falls } -30 \le x \le 30 \\ \frac{x+30}{6}, \text{ falls } 30 < x < 570 \\ 800, \text{ falls } x > 570 \end{cases}$$

Da X exponentialverteilt mit Parameter λ ist (also stetig verteilt), gilt nach der Vorlesung

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(h(X+30)\right) &= \int h(x+30)\cdot f(x)dx \\
&= \int_0^\infty h(x+30)\lambda\exp(-\lambda x)dx \\
&= \int_0^{30} 10\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{30}^{570}\frac{x+30}{6}\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{570}^\infty 800\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= 10 - e^{-30\lambda} + \frac{1}{6}\cdot\frac{60e^{-30\lambda}+e^{-30\lambda}-600e^{-570\lambda}-e^{-570\lambda}}{\lambda} \\
&\quad + \lim_{c\to\infty} 800\cdot(-e{-}\lambda c + e^{-570\lambda}) \\
&= 10 + \frac{1}{6\lambda}\cdot e^{-30\lambda} - 100\cdot e^{-570\lambda} - \frac{1}{6\lambda}\cdot e^{-570\lambda} + 800\cdot e^{-570\lambda}.
\end{aligned}$$