Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09
1.6.2009

6. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Sei P ein auf der Borelschen σ-Algebra definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Die zu P gehörende Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

wird definiert durch

$$F(x) = P\left((-\infty, x]\right) \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass gilt:
a) $F(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) F ist monoton nichtfallend, d.h. aus $x_1 \leq x_2$ folgt $F(x_1) \leq F(x_2)$.
c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
d) F ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} F(y) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu c) und d): Wenden Sie Aufgabe 21 an.

Lösung: a) Da $P[A] \in [0,1]$ für $A \in \mathcal{A}$ nach Definition gilt, so ist auch $F(x) = P\left((-\infty, x]\right) \in [0,1]$ $(x \in \mathbb{R})$.
b) Wegen $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$ für $x_1 \leq x_2$ gilt auch $F(x_1) = P\left((-\infty, x_1]\right) \leq P\left((-\infty, x_2]\right) = F(x_2)$.
c) Betrachte die monoton steigende reelle Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, \infty).$$

Nach Aufgabe 21 a) (Stetigkeit von unten) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P((-\infty, \infty)) = 1.$$

Dies impliziert die Behauptung, denn aus

$$\lim_{n\to\infty} F(x) \neq 1$$

würde die Existenz einer monoton steigenden Folge $(x_n)_n$ resultieren, für die $F(x_n)$ nicht gegen 1 strebt. Für den zweiten Fall gilt nun

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} P((-\infty,x]) \\
&= \lim_{x\to-\infty} 1 - P((x,\infty)) \\
&= 1 - \lim_{x\to\infty} P((-x,\infty)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Denn für

$$(-x_1,\infty) \subseteq (-x_2,\infty) \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-x_n,\infty) = (-\infty,\infty)$$

gilt dann wieder mit Aufgabe 21 a)

$$\lim_{x\to\infty} P((-x,\infty)) = P((-\infty,\infty)) = 1$$

und damit $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 1 - \lim\limits_{x\to\infty} P((-x,\infty)) = 0$.
d) Sei $(x_n)_n$ nun eine beliebige monoton fallende reelle Folge mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, dann gilt mit Aufgabe 21 b) (Stetigkeit von oben) und $A_n = (-\infty, x_n]$ die Behauptung, da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P((-\infty,x_n]) \\
&= P((-\infty,x]) \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 23 (3 Punkte)
Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \le x \le \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.
a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?
b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

definierte Funktion F.
c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.
d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.

- weniger als zwei Minuten zu früh kommt?
- mehr als zehn Minuten zu früh kommt?

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

a) f Dichte $\Rightarrow$ es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \overset{!}{=} 1$
Somit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx}_{=0} \\ &= \int_{0}^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2}\beta\alpha^2 - 0 \quad \overset{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist α als positiv vorausgesetzt.) b) Für $t < 0$ ist $f(t) = 0$ und somit gilt für $x \leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \beta t dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{8} t dt = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} t^2\right]_{t=0}^{x} = \frac{1}{16}x^2.$$

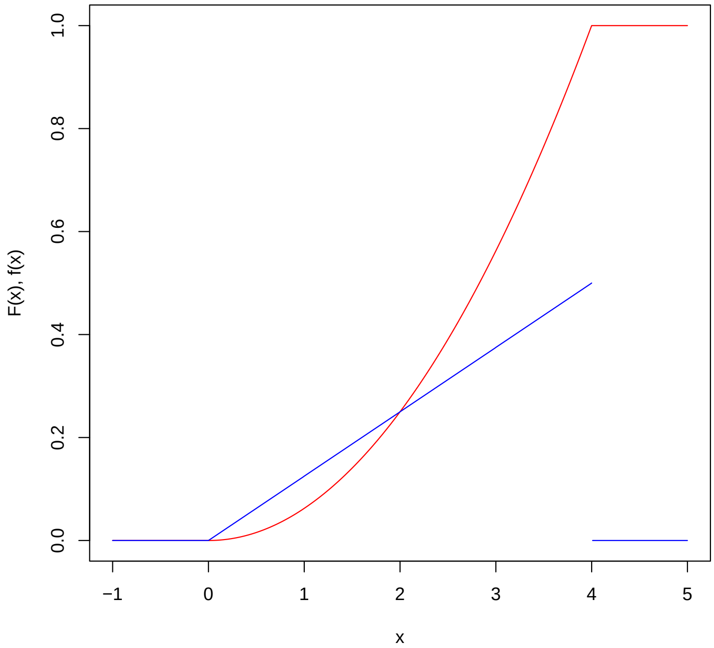
Bleibt noch der Fall $x > 4$. Hier gilt

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{16}4^2 + 0 = 1.$$

Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

c) Der Graph von f (blau) und F (rot):



d)

- Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.
-

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \int_{-\infty}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{2} \frac{1}{8}xdx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{10} f(x)dx \\ &= 1 - \int_{0}^{4} \frac{1}{8}xdx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00 \end{aligned}$$

Aufgabe 24 (3 Punkte)

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine S–Bahn Verspätung hat, betrage 0.30. Sofern die S–Bahn Verspätung hat, kommt Student S. nur mit Wahrscheinlichkeit 0.2 pünktlich zur Vorlesung. Sofern die S–Bahn aber keine Verspätung hat, kommt er mit Wahrscheinlichkeit 0.99 pünktlich zur Vorlesung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. pünktlich zur Vorlesung kommt?

b) Eine Klausur wird von einem gut vorbereiteten Studenten mit Wahrscheinlichkeit 0.99, von einem nicht gut vorbereiteten Studenten aber nur mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bestanden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student gut vorbereitet ist, sei 0.8. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der die Klausur nicht bestanden hat, gut vorbereitet war?

Lösung: a) Wir wissen laut Aufgabentext mit
$A :=$"S. kommt pünktlich zur Vorlesung",
$B :=$"S-Bahn hat Verspätung",
dass
$P(B) = 0.3,\ P(A|B) = 0.2,\ P(A|B^c) = 0.99$
gilt und wir wollen $P(A)$ berechnen.
Dann gilt mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c) \\ &= 0.3 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.99 \\ &= 0.753. \end{aligned}$$

b) Definiere die Ereignisse
$A :=$"Student vorbereitet.",
$B :=$"Student besteht Klausur.",
und gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten
$P(B|A) = 0.99,\ P(B|A^c) = 0.1,\ P(A) = 0.8.$
Gesucht ist $P(A|B^c)$. Mit der Formel von Bayes gilt dann

$$\begin{aligned} P(A|B^c) &= \frac{P(B^c|A) \cdot P(A)}{P(B^c|A) \cdot P(A) + P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.2} \\ &\approx 0.043. \end{aligned}$$

Aufgabe 25 (3 Punkte)

a) Sei (Ω, A, P) ein W–Raum und seien $A_1, \dots, A_n \in A$ mit

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Hinweis: Formen Sie die rechte Seite mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit um.
b) Student S. hat das Passwort für seinen Rechnerzugang vergessen. Er erinnert sich gerade noch, dass es aus genau 8 Ziffern $\in \{0, \dots, 9\}$ besteht. Er versucht nun, durch zufällige Eingabe 8–stelliger Zahlen das Passwort zu erraten. Da er sich alle bereits eingegebenen Zahlen notiert, tippt er keine Zahl doppelt ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der n–ten Eingabe einer 8–stelligen Zahl das Passwort findet ($n \in \mathbb{N}$ fest).
Hinweis: Gefragt ist nach

$$P(B_1^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c \cap B_n),$$

wobei B_i das Ereignis ist, dass der Student bei der i–ten Eingabe das richtige Passwort eintippt.

Lösung: a) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $A_n, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.
Zu zeigen:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_2 \cap A_1)) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})) \\
&= P(A_1) \cdot \tfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot \tfrac{P(A_3 \cap (A_2 \cap A_1))}{P(A_2 \cap A_1)} \cdot \ldots \cdot \tfrac{P(A_n \cap (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}))}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \\
&= P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).
\end{aligned}$$

b) $B_i \widehat{=}$ richtiges Passwort bei i-ter Eingabe.
Gesucht:

$$P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n)$$

Es gilt nach a)

$$P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) = P(B_1^c) \cdot P(B_2^c|B_1^c) \cdot \ldots \cdot P(B_n|(B_n^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c)$$

und es gilt wegen dem Aufschrieb aller schon bekannten Passwörter

$$\begin{aligned}
&P(B_1^c) = \tfrac{10^8-1}{10^8} \\
&P(B_2^c|B_1^c) = \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \\
&\quad\vdots \\
&P(B_{n-1}^c|(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-2}^c)) = \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)}.
\end{aligned}$$

somit folgt für $n \leq 10^8$:

$$\begin{aligned}
P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) &= \tfrac{10^8-1}{10^8} \cdot \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)} \cdot \tfrac{1}{10^8-(n-1)} \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{10^8}}}.
\end{aligned}$$