Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09
25.5.2009

5. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik"

Aufgabe 18 (3 Punkte)

Drei Spieler bekommen jeweils einen Hut aufgesetzt, dessen Farbe (rot oder blau) durch einen Münzwurf (Kopf oder Zahl) bestimmt wird. Die Spieler kennen die Farbe ihrer eigenen Kopfbedeckung nicht, sehen aber die Hüte ihrer Mitspieler. Die Kommunikation untereinander ist verboten. Nun muss jeder Spieler entweder die Farbe seines Hutes raten oder passen. Tippt mindestens einer der drei die richtige Farbe und setzt keiner auf die falsche, so gewinnt das Team einen Preis. Bestimmen Sie unter Verwendung (und expliziter Angabe) eines geeigneten Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraumes die Wahrscheinlichkeit für das Team, einen Preis zu gewinnen, wenn

a) einer der drei immer rot tippt und die anderen passen,

b) das Team vereinbart, dass nur derjenige einen Tipp abgibt, der bei seinen beiden Mitspielern dieselbe Farbe sieht. Ist diese rot, so tippt er auf blau und umgekehrt.

Lösung: 3 Spieler jeweils einen Hut. Farbe vom Hut entweder rot oder blau (mit gleicher Wk. $p = 0.5$).

Laplacescher W-Raum $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit
$\mathbf{\Omega} = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{r, b\} (i = 1, 2, 3)\}$
$\mathbf{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$\mathbf{P} : A \to [0, 1]$ mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

a) Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn einer der drei immer rot tippt und andere passen:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{4}{|\Omega|} = \frac{4}{2^3} = 0.5 \mathrel{\hat{=}} 50\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler
r	r	r
r	r	b
r	b	r
b	r	r
r	b	b
b	r	b
b	b	r
b	b	b

Z.B. 1. Spieler hat 4 Möglichkeiten rot bzw. blau zu wählen $\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten $= 4$.

b)Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn nur derjenige einen Tipp abgibt, der bei Mitspielern dieselbe Farbe sieht (Ist dies rot, so tippt er auf blau):

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{6}{|\Omega|} = \frac{6}{2^3} = 0.75 \mathrel{\hat{=}} 75\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler	1. Sp. tippt	2. Sp. tippt	3. Sp. tippt	Team gewinnt
r	r	r	b	b	b	NEIN
r	r	b	-	-	b	JA
r	b	r	-	b	-	JA
b	r	r	b	-	-	JA
r	b	b	r	-	-	JA
b	r	b	-	r	-	JA
b	b	r	-	-	r	JA
b	b	b	r	r	r	NEIN

Aufgabe 19 (3 Punkte)

Student S. hat die Zahlenkombination des Schlosses seines Koffers vergessen. Damit sich das Schloss öffnen lässt, müssen drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ jeweils richtig eingegeben werden. Student S. versucht, das Schloss durch sukzessives Ausprobieren von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ zu öffnen. Da er ein schlechtes Gedächtnis hat, kann er sich die bisher eingegebenen Ziffernfolgen nicht merken, so dass er unter Umständen mehrmals die gleiche Ziffernfolge eingibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Raten *einer* Ziffernfolge bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ die richtige Ziffernkombination zu erhalten?

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. genau bei der k–ten Eingabe einer Ziffernfolge zum ersten Mal die richtige Ziffernkombination eingibt?

Hinweis: Betrachten Sie das k–malige Werfen eines Würfels mit 1000 Seiten, die mit den Zahlen 1 bis 1000 beschriftet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim k–ten Wurf zum ersten Mal mit 1 oben landet?

c) Wie oben beschrieben versucht Student S. nun, dass Schloss durch sukzessive Eingabe von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen zu öffnen. Für das Einstellen einer Ziffernfolge und das Probieren, ob sich das Schloss öffnet, benötigt Student S. 15 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. das Schloss innerhalb von zwei Stunden öffnen kann?

Lösung: 3 Ziffern aus $\{0, 1, \dots, 9\}$

a) Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Raten **einer** Ziffernfolge bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \dots, 9\}$ die richtige Ziffernkombination zu erhalten?

$\hookrightarrow$ bei 3 Ziffern aus $\{0, 1, \dots, 9\}$: Anzahl der Möglichkeiten: 10^3

$\Rightarrow$ ges. Wk.: $p = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

b) $k \in \mathbb{N}$ fest. Wahrscheinlichkeit, genau bei k–ter Eingabe einer Ziffernfolge zum ersten Mal die richtige Ziffernkombination eingibt?

$\hookrightarrow$ ges. Wk.: $\frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$, also

$\Rightarrow$ ges. Wk.: $\frac{999^{k-1} \cdot 1}{1000^k} = \frac{1}{1000}\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} = \frac{1}{1000}\left(\frac{999}{1000}\right)^{k-1} \hat{=} \; p \cdot \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\hat{=}(k-1)\text{Misserfolge}}$

c) Benötigte Zeit zum Ausprobieren: 15 Sekunden.
Wahrscheinlichkeit, Schloss innerhalb von zwei Stunden zu öffnen?

$$2\ h \hat{=} 120\ min \hat{=} 120 \cdot 60\ sec. \; = \; 7200\ sec.$$

Anzahl Versuche innerhalb $2h$: $\frac{7200}{15} = 480$

$\hookrightarrow$ ges. Wk.:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{480} \underbrace{p(1-p)^{k-1}}_{\text{siehe b)}} &= \sum_{k=1}^{480} \frac{1}{1000}\left(\frac{999}{1000}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{480}}{1 - \frac{999}{1000}} \qquad \text{(siehe Hinweis)} \\ &= 0.3814 \quad \hat{=} \quad 38.14\% \end{aligned}$$

Aufgabe 20 (3 Punkte)

In den 4599 Ziehungen des Lottos "6 aus 49" zwischen Oktober 1955 und Dezember 2007 wurde die Zahl 38 am häufigsten gezogen, und zwar war diese genau 614-mal in den 6 Lottozahlen enthalten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4599 "rein zufälligen" Lottoziehungen die Zahl 38 mindestens 614-mal vorkommt.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer einzigen Ziehung, die 38 zu ziehen. Überlegen Sie sich dann, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4599 aufeinanderfolgenden Ziehungen die 38 genau bei den ersten $k \in \{0, 1, \ldots, 4599\}$ Ziehungen zu erhalten.

b) Numerische Berechnung der Wahrscheinlichkeit in a) ergibt den Wert 0.01. Legt diese geringe Wahrscheinlichkeit nahe, dass die Lottozahlen doch nicht unbeeinflusst voneinander rein zufällig gezogen werden?

Lösung: a) Die gesuchte Einzelwahrscheinlichkeit ergibt sich wieder aus $\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}}$. Es gilt damit

$$\begin{aligned}\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} &= \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} \\ &= \frac{1 \cdot 49! \cdot 6! \cdot 43!}{49! \cdot 5! \cdot 44!} \\ &= \frac{6}{44} \\ &= \frac{3}{22} \\ &= p.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die 38 genau bei den ersten k ziehungen vorkommt ist

$$P[\text{"Die ersten k mal 38"}] = p^k \cdot (1-p)^{4599-k}$$

und nun mit beliebiger Ziehung

$$P[\text{"k mal 38"}] = \binom{4599}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{4599-k}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich dann mit

$$P[\text{"mindestens 614 mal 38"}] = \sum_{k=614}^{4599} P[\text{"k mal 38"}].$$

b) Nein, einen solchen Schluß kann man nicht ziehen. Da die Wahrscheinlichkeit > 0 is haben wir es noch immer mit einem mögliches Ereignis zu tun. Wir kennen zudem (noch) keine Methode um mathematisch zu argumentieren, dass die Wahrscheinlichkeit "zu klein" ist oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine der Lottozahlen minestens 614 mal vorkommt ist möglicherweise deutlich hoeher als die Wahrscheinlichkeit, dass eine spezielle so oft vorkommt. Daher koennte 38 gerade als solche aufgefallen sein.

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W–Raum.

a) Zeigen Sie: Für alle $A, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

(sog. Stetigkeit von unten des W–Maßes P).

Hinweis zu a): Auf

$$A = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$$

P anwenden, die σ–Additivität von P ausnützen und

$$A_N = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n \setminus A_{n-1})$$

benützen.

b) Zeigen Sie: Für alle $A, A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

(sog. Stetigkeit von oben des W-Maßes P).

Hinweis zu b): Wenden Sie a) auf $\Omega \setminus A_1$, $\Omega \setminus A_2$, $\dots$ an.

Lösung: a) Wir nutzen den Hinweis und erhalten

$$\begin{aligned} P[A_N] &= P[A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n \backslash A_{n-1})] \\ &\overset{\text{additivität}}{=} P[A_1] + \bigcup_{n=2}^{N} P[(A_n \backslash A_{n-1})] \end{aligned}$$

womit gilt

$$\begin{aligned} \lim P[A_n]_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty} P[A_1 + \bigcup_{i=2}^{n} (A_n \backslash A_{n-1})] \\ &\overset{\text{add.}}{=} \lim_{n\to\infty} P[A_1] + \sum_{i=2}^{n} P[(A_n \backslash A_{n-1})] \\ &= P[A_1] + \sum_{i=2}^{\infty} P[(A_n \backslash A_{n-1})] \\ &\overset{\sigma-\text{add.}}{=} P[A]. \end{aligned}$$

b) Mit dem Hinweis und der Stetigkeit von unten (!) gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\Omega\backslash A_n) = P(\Omega\backslash A),$$

womit auch gilt

$$\lim_{n\to\infty} 1 - P(A_n) = 1 - P(A),$$

denn es gilt

$$P(\Omega\backslash A) = 1 - P(A),$$

und

$$P(\Omega\backslash A_n) = 1 - P(A_n).$$

Damit folgt die Behauptung.