Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09
18.5.2009

4. Übungsblatt zur „Einführung in die Stochastik“

Aufgabe 14 (3 Punkte)

In einem Café gibt es 3 verschiedene Sorten von Torten zur Auswahl. Eine Bestellung von 10 Stück Torte bestehe in der Angabe der Anzahl der von jeder Torte bestellten Stücke. Wieviele verschiedene Bestellungen gibt es für die 10 Stück Torte, falls von jeder Sorte mindestens ein Stück bestellt wird?

Hinweis: Die bestellten Tortenstücke werden nebeneinander aufgereiht, und zwar so, dass gleichartige Tortenstücke in einem (nichtleeren) Block zusammengefasst sind. Zur Markierung der Blockgrenzen denken Sie sich an den entsprechenden Stellen in den Zwischenräumen 2 Fähnchen plaziert. Wieviele Möglichkeiten gibt es dann für die Plazierungen dieser Fähnchen?

Lösung: Anordnung von 10 Stück “Törtchen” in drei Blöcke, von 3 verschiedenen Torten, wobei mindestens 1 Stück von jeder Torte enthalten sein muss.

<u>Beispiel:</u>

$$\underbrace{000}_{\text{Torte A}} \quad \upharpoonleft \quad \underbrace{00}_{\text{Torte B}} \quad \upharpoonleft \quad \underbrace{000}_{\text{Torte C}}$$

$\hookrightarrow$ Ziehen von 2 Elementen aus einer Grundmenge von 9 (da man 9 freie Plätze zwischen 10 Kuchenstücke hat).

$\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen führt zu

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36$$

$\Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten $= 36$

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Ein Zufallsgenerator erzeugt mit Ziffern aus $\{0, 1, ..., 9\}$ Ziffernblöcke der Länge 4. Geben Sie mit Begründung die Wahrscheinlichkeiten für folgende fünf Ereignisse an:

(a) alle Ziffern verschieden
(b) genau ein Paar gleicher Ziffern
(c) genau zwei Paare gleicher Ziffern
(d) genau drei gleiche Ziffern
(e) vier gleiche Ziffern

Berechnen Sie zur Kontrolle die Summe aller Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: $\Rightarrow$ Anzahl d. möglichen Fälle $= 10^4$

a) Wk., dass alle Ziffern verschieden sind = ?
Anschaulich: $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Alle Ziffern verschieden: $\boxed{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4}$

Also: Für die erste Stelle gibt es 10 Möglichkeiten für a_1, für die zweite Stelle gibt es nur noch 9 Möglichkeiten für a_2 (da a_1 schon vergeben ist), für die dritte Stelle 8 und für die vierte Stelle 7 Möglichkeiten.

Insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ Möglichkeiten.

$\hookrightarrow$ Wk, dass alle Ziffern verschieden:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{5040}{10^4} = 0.504 \mathrel{\hat{=}} P(\mathbf{a}))$$

b) Wk., genau ein Paar gleicher Ziffern ist = ?
Anschaulich: $\boxed{a_1 \mid a_1 \mid a_3 \mid a_4}$

Also: Für die erste Stelle gibt es 10 Möglichkeiten für a_1 und somit für die zweite Stelle genau 1 Möglichkeiten (da a_1 schon vergeben ist), für die dritte Stelle gibt es 9 und für die vierte Stelle 8 Möglichkeiten.

Insgesamt $10 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten.

Anzahl d. Anordnungsmöglichkeiten: 6 siehe Skizze

a_1	a_1	a_3	a_4
a_1	a_3	a_1	a_4
a_1	a_3	a_4	a_1
a_3	a_1	a_1	a_4
a_3	a_1	a_4	a_1
a_3	a_4	a_1	a_1

$\hookrightarrow$ Wk, dass genau ein Paar gleicher Ziffern auftritt:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{6 \cdot 720}{10^4} = 0.432 \mathrel{\hat{=}} P(\mathbf{b}))$$

c) Wk., genau zwei Paare gleicher Ziffern = ?
Anschaulich: $\boxed{a_1 \mid a_1 \mid a_2 \mid a_2}$

Also: Für die erste Stelle gibt es 10 Möglichkeiten für a_1 und somit für die zweite Stelle genau 1 Möglichkeiten (da a_1 schon vergeben ist), für die dritte Stelle gibt es 9 und für die vierte Stelle ebenfalls genau 1 Möglichkeit.

Insgesamt $10 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 = 90$ Möglichkeiten.

Anzahl d. Anordnungsmöglichkeiten: 3

$\hookrightarrow$ Wk, genau zwei Paare gleicher Ziffern:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{90 \cdot 3}{10^4} = 0.027 \mathrel{\hat{=}} P(\mathbf{c}))$$

d) Wk., genau drei gleiche Ziffern = ?
Anschaulich: $\boxed{a_1 \mid a_1 \mid a_1 \mid a_2}$

Insgesamt $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 90$ Möglichkeiten.

Anzahl d. Anordnungsmöglichkeiten: 4

$\hookrightarrow$ Wk, genau drei gleiche Ziffern:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{90 \cdot 4}{10^4} = 0.036 \mathrel{\hat{=}} P(\mathbf{d}))$$

e) Wk., alle gleich = ?
Anschaulich: $\boxed{a_1 \mid a_1 \mid a_1 \mid a_1}$

Insgesamt $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$ Möglichkeiten.

$\hookrightarrow$ Wk, alle gleich:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{10}{10^4} = 0.001 \mathrel{\hat{=}} P(\mathbf{e}))$$

Kontrolle: Summe aller Wk.: $P(\mathbf{a})) + P(\mathbf{b})) + P(\mathbf{c})) + P(\mathbf{d})) + P(\mathbf{e})) = 1$

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$ die Formel:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Lösung: Dreimaliges Anwenden von

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

auf die rechte Seite der Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B \cup A \cap C) \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Aufgabe 17 (3 Punkte)

a) (Erstes Lemma von Borel und Cantelli)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_n$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \ \ (N \in \mathbb{N})$$

und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit rechts mit Hilfe der σ-Subadditivität ab.

b) Dozent K. fragt in jeder seiner mündlichen Prüfungen nach dem ersten Lemma von Borel und Cantelli. Da die Studenten sich untereinander absprechen, kann der n-te Prüfling die Frage nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^2}$ nicht richtig beantworten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei sukzessiver Durchführung von unendlich vielen Prüfungen nur endlich viele der Prüflinge diese Frage nicht richtig beantworten?
Hinweis: Wenden Sie a) mit A_n="Prüfling n beantwortet die Frage nicht richtig" an.

Lösung: a) Mit dem Hinweis gilt

$$\begin{aligned} P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) &\leq P(\cup_{k=N}^{\infty} A_k) \, (\forall N \in \mathbb{N}) \\ &\overset{\sigma-subadd.}{\leq} \sum_{k=N}^{\infty} P(A_k) \to 0 \, (N \to \infty). \end{aligned}$$

b) Der Hinweis und der Aufgabentext liefert

$$P(A_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

kann man a) anwenden und es gilt

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei sukzessiver Durchführung von unendlich vielen Prüfungen nur endlich viele der Prüflinge diese Frage nicht richtig beantworten gleich 0.