Partielle Differentialgleichungen

11. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t). \tag{$\star$}$$

1. Zeigen Sie, dass auch $v(x,t) = x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ eine Lösung von $(\star)$ ist.

   We compute

$$\begin{aligned} v_t(x,t) =& x \cdot \nabla u_t(x,t) + 2u_t(x,t) + 2tu_{tt}(x,t) \\ \Delta v(x,t) =& 2\Delta u(x,t) + x \cdot \nabla(\Delta u(x,t)) + 2t\Delta u(x,t) \end{aligned}$$

   and we see that $v_t = \Delta v$.

2. Sei $u^i\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Lösung von $(\star)$ mit $n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$u(x_1, ..., x_n, t) = \Pi_{i=1}^n u^i(x_i, t)$$

   ist eine Lösung der $(\star)$.

   We have, from the product rule

$$u_t = \sum_{j=1}^n u_t^j(x_j, t)\Pi_{i\neq j} u^i(x_i, t).$$

   Moreover

$$u_{x_j x_j} = u_{xx}^j(x_j, t)\Pi_{i\neq j} u^i(x_i, t)$$

   and so

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n u_{xx}^j(x_j, t)\Pi_{i\neq j} u^i(x_i, t)$$

   and thus we see that $v_t = \Delta v$.

G 2 Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ so dass die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \Delta^{(k)} g(x)$$

in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ konvergiert und gleichweise zweimal differentierbar ist. Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst, stetig bis zum Rand $\{t = 0\}$ ist und dass $u(x, 0) = g(x)$ gilt.

Since the series can be differentiated twice, we have

$$u_t = \sum_{k=1}^\infty k\frac{t^{k-1}}{k!}\Delta^{(k)} g(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\Delta^{(k)} g(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\Delta^{(k+1)} g(x) = \Delta u$$

and so u solves the wave equation.

The continuity up to boundary follows from the Theorem and Corollary on p. 147 of the Analysis I script to be found here.

G 3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) =& \Delta u(x,t) \quad \text{für } (x,t) \in U \times (0,T) \\ u(x,t) =& g(x,t) \quad \text{für } x \in \partial U \\ u(x,0) =& u^0(x) \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung hat.
Hinweis: Zeigen Sie dass die kinetische Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U u^2(x,t) dx$$

den Wert 0 hat wenn $g = u^0 = 0$.

Suppose there are two solutions u and v and take their difference $w = u - v$. Then w satisfies

$$\begin{aligned} w_t(x,t) =& \Delta w(x,t) \quad \textit{for } (x,t) \in U \times (0,T) \\ w(x,t) =& 0 \quad \textit{for } x \in \partial U \\ w(x,0) =& 0. \end{aligned}$$

Thus $E(0) = 0$, for the energy of w. Moreover, $E(t) \geq 0$ for all t and so to prove that $E(t) = 0$ for all t is is sufficient to show that $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$. But

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) =& \int_U w(x,t) w_t(x,t) dx = \int_U w(x,t) \Delta w(x,t) dx \\ =& -\int_U \nabla w(x,t) \cdot \nabla w(x,t) dx + \int_{\partial U} w(x,t) \nabla w(x,t) \cdot \nu dS_x \end{aligned}$$

(the last equality is Gauss' theorem). Since $w = 0$ for $x \in \partial U$ and $\nabla w \cdot \nabla w = |\nabla w|^2 \geq 0$ we have that $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$ and this proves $E(t) = 0$ for all t. Therefore $\int_U w^2(x,t)dx = 0$ for all t and from this follows that $w(x,t) = 0$ for all $x \in U$ and $t \geq 0$. Therefore $u = v$ and from this uniqueness follows.

Hausübung

H 1 Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, stetig bis zum Rand $\{t = 0\}$ mit $u(x,0) = g(x)$. Zeigen Sie, dass

1. $v(x,t) = u(x, a^2 t)$ eine Lösung des Anfangswertproblemes $v_t = a^2 \Delta v$, $v(x,0) = g(x)$ ist.
2. $v(x,t) = e^{\lambda t} u(x,t)$ eine Lösung des Anfangswertproblemes $v_t = \Delta v + \lambda v$, $v(x,0) = g(x)$ ist.
3. $v(x,t) = u(x - bt, t)$ (mit $b \in \mathbb{R}^n$) eine Lösung des Anfangswertproblemes $v_t = \Delta v - b \cdot \nabla v$, $v(x,0) = g(x)$ ist.
4. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblemes

$$\begin{aligned} u_t(x,y,t) =& 4\Delta u(x,y,t) + 2u(x,y,t) - 3u_y(x,y,t) \quad \text{für } (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,y,0) =& x^2 + y^2. \end{aligned}$$