Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Przemysław Kamiński

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.06.2009

Partielle Differentialgleichungen

9. Übung

Gruppenübung

G 1 [**Umgekehrter Mittelwertsatz**] $u \in C^2(U)$ erfülle die Mittelwertformel, d.h. für alle $B(x,r) \subset U$ gelte

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y.$$

Zeigen Sie, dass u harmonisch in U ist.
Hinweis: $\frac{d}{dr} ⨍_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y = 0$.

G 2 [**Schwarz Symmetrieprinzip**] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, symmetrisch bezüglich der Hyperebene $\{x_n = 0\}$. Sei $U_+ = \{x_n > 0\} \cap U$ und $u\colon U_+ \to \mathbb{R}$ harmonisch, stetig bis zum Rand und sei

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{für } x \in U_+ \\ -u(S(x)), & \text{für } x \in U_- = U \setminus \overline{U_+}, \end{cases}$$

wobei $S(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ die Symmetrietransformation bezüglich $\{x_n = 0\}$ ist. Zeigen Sie, dass wenn $u|_{\{x_n=0\}} = 0$ gilt, dann $\hat{u}$ harmonisch in U ist.

G 3 [**Satz von Liouville**] Sei u

1. harmonisch in $\mathbb{R}^n$
2. harmonisch in $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$, $u_{\{x_n=0\}} = 0$

und beschränkt. Zeigen Sie, dass u konstant ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Mittelwertformel.

Hausübung

H 1 Zeigen Sie, dass für $u\colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch und $U = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0,1)$ (offen und *unbeschränkt*), das Maximum- und Minimumprinzip nicht gilt, d.h.

$$\max_{\overline{U}} u \neq \max_{\partial B(0,1)} u, \quad \min_{\overline{U}} u \neq \min_{\partial B(0,1)} u.$$

H 2 Sei $u \in C^2(U)$ und für alle $B(x,r) \subset U$ gelte

$$u(x) = ⨍_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Zeigen Sie das u harmonisch in U ist.