Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Przemysław Kamiński

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16.07.2009

Partielle Differentialgleichungen

13. Übung

Gruppenübung

G 1 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \quad \text{für } (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) + x \\ u(0,t) &= 0,\ u(l,t) = l \quad \text{für } t \geq 0 \end{aligned}$$

(wobei $l > 0$) mit diesen Schritten:

1. Ziehen Sie eine Funktion ab so dass $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
2. Lösen Sie 1. mit Trennung der Variablen.

G 2 Betrachten Sie die Probleme

$$\Delta u(x,y) + u(x,y) = 0 \quad \text{für } (x,y) \in B(0,1). \tag{†}$$

1. Schreiben Sie (†) in Polarkoordinaten.
2. Entwickeln Sie u in eine Fourierreihe.
3. Zeigen Sie, dass die Koeffiziente von diese Reihe die Gleichung

   $$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) + \left(r^2 - n^2\right) a_n(r) = 0$$

   erfüllen. $\{a_n\}$ heißen die *Bessel-Funktionen.*
4. Entwickeln Sie a_n in eine Potenzreihe:

   $$a_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{k+n}$$

   und zeigen Sie, dass

   $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(n+k)^2 - n^2\right] r^{k+n} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{k+n+2} = 0$$

   für $n \geq 2$ gilt.
5. Zeigen Sie, dass

   $$a_n(r) = c_0 r^n \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}\right]$$

   für $n \geq 2$ erfüllt ist.

Hausübung

H 1 Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)$$

für $(x,y) \in S = (0,a) \times (0,b)$ mit

$$\begin{aligned} u(x,y,0) =& g(x,y) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{b}y\right) \\ u(x,y,t) =& 0 \quad \text{für } (x,y) \in \partial S. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Lösen Sie $(\star)$ mit Trennung der Variablen. Zeigen Sie, dass diese Lösung durch die Reihe

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{(k)} g(x,y)$$

dargestellt werden kann.