



# Partielle Differentialgleichungen

## 11. Übung

### Gruppenübung

**G 1** Sei  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t). \quad (\star)$$

1. Zeigen Sie, dass auch  $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  eine Lösung von  $(\star)$  ist.
2. Sei  $u^i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung von  $(\star)$  mit  $n = 1$ . Zeigen Sie, dass

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \prod_{i=1}^n u^i(x_i, t)$$

ist eine Lösung der  $(\star)$ .

**G 2** Sei  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  so dass die Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{(k)} g(x)$$

in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  konvergiert und gleichweise zweimal differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass  $u$  die Wärmeleitungsgleichung löst, stetig bis zum Rand  $\{t = 0\}$  ist und dass  $u(x, 0) = g(x)$  gilt.

**G 3** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und sei  $T > 0$ . Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in U \times (0, T) \\ u(x, t) &= g(x, t) \quad \text{für } x \in \partial U \\ u(x, 0) &= u^0(x) \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung hat.

*Hinweis:* Zeigen Sie dass die kinetische Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U u^2(x, t) dx$$

den Wert 0 hat wenn  $g = u^0 = 0$ .

### Hausübung

**H 1** Sei  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, stetig bis zum Rand  $\{t = 0\}$  mit  $u(x, 0) = g(x)$ . Zeigen Sie, dass

1.  $v(x, t) = u(x, a^2 t)$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $v_t = a^2 \Delta v$ ,  $v(x, 0) = g(x)$  ist.
2.  $v(x, t) = e^{\lambda t} u(x, t)$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $v_t = \Delta v + \lambda v$ ,  $v(x, 0) = g(x)$  ist.
3.  $v(x, t) = u(x - bt, t)$  (mit  $b \in \mathbb{R}^n$ ) eine Lösung des Anfangswertproblems  $v_t = \Delta v - b \cdot \nabla v$ ,  $v(x, 0) = g(x)$  ist.
4. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x, y, t) &= 4\Delta u(x, y, t) + 2u(x, y, t) - 3u_y(x, y, t) \quad \text{für } (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, y, 0) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$