Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Przemysław Kamiński

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25.06.2009

Partielle Differentialgleichungen

10. Übung

Gruppenübung

G 1 Sei $\{u_n\}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in U definiert sind, und die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von U gegen u konvergiert sind (kompakte Konvergenz). Zeigen Sie, dass u harmonisch in U ist.
Hinweis: Nutzen Sie die (umgekehrte) Mittelwertformel.

G 2

1. Es sei
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (\dagger)$$
eine in $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$ konvergente Potenzreihe mit $c_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für den Realteil $\Re f(z)$ gilt
$$\Re f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) - b_n \sin(n\phi)), \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$
mit $\phi = \arg z$, $r = |z|$ (also $z = re^{i\phi}$).
2. Lösen Sie das folgende Randwertprobleme:
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) =& 0, \quad \text{für } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) =& 2x^2 + x - 1, \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$
Hinweis: Machen Sie den Ansatz
$$u(x,y) = \Re f(x + iy), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
und verwenden Sie $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(\cos(2\phi) + 1)$.

Hausübung

H 1 Sei $U = \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(0,1)$ und $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ eine harmonische Funktion, so dass $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ erfüllen ist. Zeigen Sie, dass
$$\sup_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|,$$
d.h. die Maximumprinzip für des absolutes Betrages gilt.
Hinweis: Nutzen Sie die Maximum- und Minimumprinzipen für der Menge $V = U \cap B(0,R)$ und betrachten Sie $R \to \infty$.

H 2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $u \colon U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für alle $B(x,r) \subset U$ gelte
$$u(x) = ⨍_{B_r(x)} u(y)dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)dy. \qquad (\star)$$

1. Zeigen Sie, dass ∇u existiert und stetig in U ist.
   Hinweis: Nutzen Sie den Differenzenquotienten.
2. Zeigen Sie, dass ∇u die Gleichung $(\star)$ erfüllt und folgern Sie, dass ∇u harmonisch ist.
3. Zeigen Sie, dass u beliebig oft stetig differenzierbar ist.