Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 Februar 2009

Analysis III – Funktionentheorie

Ferienübung

Aufgabe 1

Geben Sie eine größtmögliche offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, auf der die folgenden Funktionen holomorph sind. Hierbei ist immer $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

(a) $f(z) = z\overline{z}$,

(b) $f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = x + \mathrm{i}\sin(x)\cos(y)$,

(c) $f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = \cos\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big)\cosh\Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big)\sinh\Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\Big)$,

(d) $f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\arctan(y/x)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie, falls es jeweils möglich ist, eine holomorphe Funktion mit

(a) $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(x + y\mathrm{i})) = -2xy + \mathrm{e}^x\cos(y)$,

(b) $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(x + y\mathrm{i})) = 3x^2y - 4\sin(x)$.

Aufgabe 3

Es seien $R > r > 0$. Geben Sie einen Integrationsweg γ an, dessen Spur der Rand des Halbrings $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ist und berechnen Sie $\int_\gamma z^n\overline{z}^m \, \mathrm{d}z$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Hebbarkeitssatz:

Es sei $g \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $D \cap g \neq \emptyset$ und $f : D \setminus g \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist dann f auf $D \setminus g$ beschränkt, so kann f holomorph auf D fortgesetzt werden.

Aufgabe 5

Charakterisieren Sie diejenigen offenen Teilmengen $D \subseteq C$, für die es eine holomorphe Abschneidefunktion gibt, d.h. eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1$ für alle $z \in D$ und $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{dist}(z, D) > 1$.

Aufgabe 6

γ_1, γ_2 und γ_3 seien die folgenden Integrationswege:

- γ_1 läuft auf einem Kreis von i über -1 und $-2 + \mathrm{i}$ nach i zurück.
- γ_2 läuft von $2 + 2\mathrm{i}$ auf einem Kreisbogen über -1 nach $2 - 2\mathrm{i}$ und von dort gerade nach $2 + 2\mathrm{i}$ zurück.

- γ_3 beschreibt den einmal positiv durchlaufenen Rand des Quadrates mit den Ecken $1+\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$.

Skizzieren Sie den Zyklus $\gamma = 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ und bestimmen Sie für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}(\gamma)$ die Umlaufzahl $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$. In welchen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist γ nullhomolog?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{z^3}}{z^2+z+1}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \Big[\sinh\Big(\frac{1}{2z+1-\mathrm{i}}\Big)\Big]^{-1}\,\mathrm{d}z,$$

wobei γ der Zyklus aus der vorhergehenden Aufgabe ist.

Aufgabe 8

Wie viele Fixpunkte hat die Polynomfunktion $z \mapsto z^6 - 2\pi\mathrm{i}z^2 + 4z + 1$ im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?

Aufgabe 9

Erklären Sie, warum auf der Menge $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kein Logarithmus existiert.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

(a) $\displaystyle\int_\gamma (1+\overline{z})\,\mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{t\mathrm{i}},\ t \in [0, 2\pi].$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) = \pi + \mathrm{e}^{t\mathrm{i}}, t \in [0, 2\pi].$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{e} + \pi^2\mathrm{e}^{t\mathrm{i}},\ t \in [0, 2\pi].$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) = 2009 \cdot \mathrm{e}^{t\mathrm{i}},\ t \in [0, 2\pi].$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(z-1)\cdot(z-1)^7\cdot\sin(z)}{\mathrm{e}^z(z-8)}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{mit } \gamma(t) := 4 + 2\mathrm{e}^{it},\ t \in [0, 8\pi].$

(Hierbei sei $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus.)

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10x+7}{(x^2-2x+10)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 12

Es sei

$$f(z) = \frac{z^2+3z+2}{(z+2)(z+1)^3 z}\sin(1/z).$$

Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten dieser Funktion, geben Sie jeweils die zugehörige Nullstellenordnung an und bestimmen Sie in allen Stellen, in denen keine wesentliche Singularität vorliegt, das Residuum.

Berechnen Sie schließlich $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, wobei γ den einfach positiv durchlaufenen Rand des Dreiecks mit dem Ecken $-1/2+\mathrm{i}$, $-1/2-\mathrm{i}$ und -5 beschreibt.

Aufgabe 13

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Residuen (vgl. Beispiel IV.4.3 d) - f) der Vorlesung). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f eine meromorphe Funktion auf U.

(a) Ist $z_0 \in U$ ein einfacher Pol von f und ist g eine in z_0 holomorphe Funktion, so gilt $\mathrm{Res}_{fg}(z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}_f(z_0)$.

(b) Ist f holomorph in U und hat eine einfache Nullstelle in $z_0 \in U$ und ist g in z_0 holomorph mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}_{g/f}(z_0) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

(c) Besitzt f in $z_0 \in U$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ und ist $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$, so gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

Aufgabe 14

Es sei $a_n := (n^2\pi + 1)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Funktionen f, die auf einer Umgebung des Einheitskreises holomorph sind und die

$$f(\mathrm{e}^{a_n \mathrm{i}}) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllen. Zeigen Sie weiter, dass diese Funktionen einen Vektorraum bilden und bestimmen Sie dessen Dimension.

Aufgabe 15

Es sei

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}.$$

Welche Werte kann das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für geschlossene einfach positiv durchlaufene Wege γ annehmen?