Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 10./11.2.2009

Analysis III – Funktionentheorie

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(G 2)

Bei Erkundungsflügen des Raumschiffs Enterprise im Rouché-Nebel ist nach durchfliegen mehrerer elektromagnetischer Disturberanzen ein Problem in der Beameinheit aufgetreten. Die Materialisierungskanone spielt verrückt und verteilt alles, was auf das Raumschiff gebeamt wird, ziemlich gleichmäßig auf der kreisrunden (und mit der komplexen Einheitskreisscheibe identifizierten) Plattform.

Scotty konnte die Störung schon so weit eindämmen, dass die Moleküle nicht mehr auf einer dichten Menge verteilt werden, sondern die Kanone schon auf einige Punkte fokussiert und die ankommenden Moleküle stochastisch auf diese verteilt. Leider ergeben sich diese Punkte durch eine recht komplizierte Rechnung als die Lösungen der Gleichung

$$\sin(z) = \frac{1}{2}z^7 - 3z.$$

Natürlich ist das Außenteam gerade unterwegs und müsste dringend hochgebeamt werden, wobei es zweckmäßigerweise in genau ein Einzelteil zerlegt werden sollte.

Kann Scotty das Außenteam gefahrlos hochbeamen?

(G 3)

(a) Es sei $a > 1$, $S := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq a\}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta \in (0,1)$ gibt, so dass für alle $\alpha, \beta \in (0,\delta)$ und alle $z \in S$ gilt

$$\Big|\int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t\Big| < \varepsilon.$$

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}$, $\tilde{S} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq A\}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\kappa > 1$ gibt, so dass für alle $\alpha, \beta > \kappa$ und alle $z \in \tilde{S}$ gilt

$$\Big|\int_\alpha^\beta \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t\Big| < \varepsilon.$$