Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 27./28.1.2009

Analysis III – Funktionentheorie

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f im Kreisring $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 2\}$ und im Kreisring $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(b) Bestimmen Sie weiter $\omega_f(0)$, $\omega_f(1)$ und $\omega_f(2)$, sowie jeweils die Residuen in diesen Punkten.

(G 2)

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $\omega_f(z_0) > -\infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt genau dann $\omega_f(z_0) = n$, wenn es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ gibt, für die $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt.

(b) $\omega_f(z_0) = -\omega_{1/f}(z_0)$ (vgl. den Beweis zu Satz IV.2.4).

(c) $\omega_{f\cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)$.

(G 3)

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$. Weiter sei W eine Umgebung von $w_0 := f(z_0)$ und die holomorphe Funktion $g : W \setminus \{w_0\} \to \mathbb{C}$ besitze in w_0 einen einfachen Pol. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $g \circ f$ in z_0 ebenfalls einen einfachen Pol besitzt und bestimmen Sie $\mathrm{Res}_{g\circ f}(z_0)$.

Hausübungen

(H 1)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S \subseteq M$ diskret und $f : M \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $r_1, r_2 > 0$ so, dass f im Kreisring $R := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ holomorph ist und für die zugehörige Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $z \in R$, gilt, dass $a_n \neq 0$ für alle $n < 0$ ist. Dann besitzt f eine wesentliche Singularität.

Hinweis: Aufgabe (G1).

(H 2)

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen

$$\text{(a)} \quad z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z - 1} \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad z \mapsto (z+1)\sin(1/(z-1)),$$

ermitteln Sie, ob es sich jeweils um hebbare Singularitäten, Pole oder wesentliche Singularitäten handelt und bestimmen Sie in allen Polstellen jeweils das Residuum.

(H 3)

Es sei $S \subseteq \mathbb{C}$ endlich mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} z \cdot f(z) = 0$.

(a) Zeigen Sie: Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S, \mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_f(a).$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Ist der Wert des Integrals reell?