Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

Analysis III – Funktionentheorie

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ beschränkt. Wir betrachten das reelle uneigentliche Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und $I = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})} \,\mathrm{d}t$ gilt.

(b) Sei für $r > 0$

$$\gamma_{r,1}(t) = t, \quad t \in [-r, r] \qquad \text{und} \qquad \gamma_{r,2}(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi],$$

sowie $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2} \,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \,\mathrm{d}z.$$

(c) Folgern Sie nun $I = \pi \cdot h(\mathrm{i})$.

(d) Bestimmen Sie damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x.$$

(G 2)

(a) Bestimmen Sie für die folgende Laurentreihe den Haupt- und den Nebenteil, sowie ihr Konvergenzgebiet (ohne Betrachtung des Konvergenzverhaltens auf dem Rand):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n.$$

(b) Bestimmen Sie weiter einen geschlossenen Ausdruck für die durch die Laurentreihe in (a) gegebene Funktion. Sieht man diesem Ausdruck an, warum der Konvergenzbereich in (a) nicht größer sein kann?

(c) Geben Sie eine Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ für $1 < |z| < 2$ an.

Hinweis: Man kann $f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}$ für geeignete A und B schreiben.

(G 3)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass für jeden Punkt $z \in G$ die gesamte Verbindungsstrecke von z und z_0 ganz in G liegt, d.h. für jedes $z \in G$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda z_0 + (1-\lambda)z \in G$. Man sagt dann „$G$ ist bezüglich z_0 sternförmig“.

(a) Zeigen Sie, dass jedes konvexe Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig ist.

(b) Es sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $z_0 \in G$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : [a,b] \to G$ ein Zyklus mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$. Beweisen Sie, dass γ nullhomotop und damit nullhomolog in G ist.

Bemerkung: Tatsächlich gilt das für jeden Zyklus in einem sternförmigen Gebiet, d.h. jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend. Die Voraussetzung $\gamma(a) = z_0$ macht den Beweis jedoch deutlich übersichtlicher.

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten für $b > 0$ das Integral

$$\mathrm{e}^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\, \mathrm{d}x.$$

(b) Integrieren Sie für $a > 0$ die Funktion e^{-z^2} über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $\pm a$ und $\pm a + b\mathrm{i}$ und zeigen Sie

$$\mathrm{e}^{b^2} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2tb)\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2} + \int_{0}^{b} \mathrm{e}^{-a^2} \left[\mathrm{e}^{t^2} \sin(2at) + \mathrm{e}^{(b-t)^2} \sin\bigl(2a(b-t)\bigr)\right] \mathrm{d}t$$

(c) Berechnen Sie nun das gesuchte Integral.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

(H 2)

Beweisen Sie Satz 2.9 der Vorlesung:

Ist γ ein geschlossener Integrationsweg und gilt $\mathrm{spur}(\gamma) \subseteq B_r(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$, so gilt

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq B_r(z_0) \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus B_r(z_0) \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma).$$

(H 3)

(a) Bestimmen Sie für die folgende Laurentreihe den Haupt- und den Nebenteil, sowie ihr Konvergenzgebiet (ohne Betrachtung des Konvergenzverhaltens auf dem Rand):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n + 1}.$$

(b) Geben Sie eine Laurentreihenentwicklung der Funktion $g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ für $|z| > 0$ an.