Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 9./10.12.2008

Analysis III – Funktionentheorie

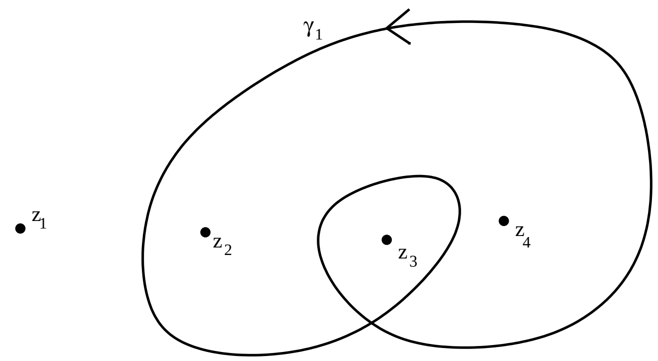
5. Übung

Gruppenübungen

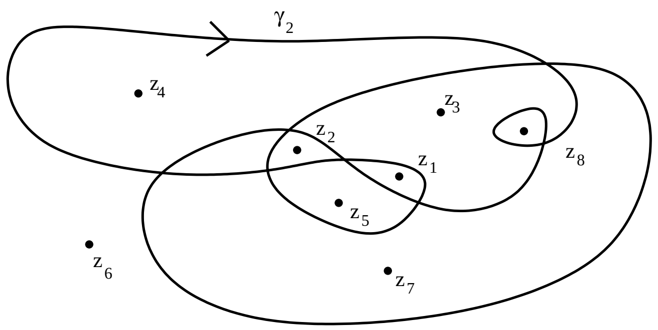
(G 1)

Bestimmen Sie die Umlaufzahl für die Punkte in der Skizze bezüglich der angegebenen Wege γ_1 bzw. γ_2.

(a) Weg γ_1:



(b) Weg γ_2:



Hinweis: Sie können auch das Resultat aus der H1 verwenden.

(G 2)

(a) Wir schreiben $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt?

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$ auf G. Zeigen Sie, dass dann eine reelle Zahl c existiert mit $f(z) = g(z) + c\mathrm{i}$ für alle $z \in G$.

(G 3)

Für $a, b \in (0, \infty)$ sei $R := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < a,\ |\mathrm{Im}\, z| < b\}$ ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ und γ sei die Kurve, die den Rand von R in mathematisch positivem Sinne durchläuft. Zeigen Sie, dass für die Umlaufzahl $I(\gamma, z)$ gilt:

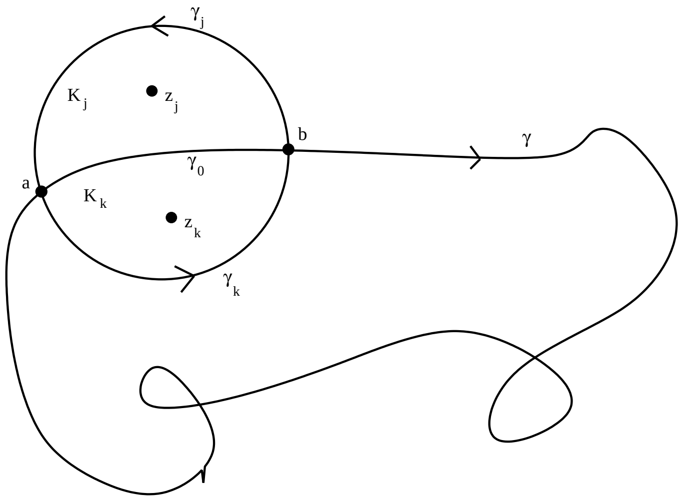
$$I(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & : \quad z \in R, \\ 0 & : \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R}. \end{cases}$$

Hausübungen

(H 1)

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z_j, z_k \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, es existiert ein doppelpunktfreier, geschlossener Weg γ', der γ in genau zwei Punkten a und b schneidet und in dessen Inneren die Punkte z_j, z_k liegen. Den Teilweg von γ, der von a nach b führt bezeichnen wir mit γ_0. Zeigen Sie, falls z_j und z_k auf unterschiedlichen Seiten von γ_0 liegen, dann unterscheiden sich die Umlaufzahlen $I(\gamma, z_j)$ und $I(\gamma, z_k)$ nur um den Wert ± 1, je nachdem in welcher Richtung (mathematisch positiv oder negativ) der Weg γ durchlaufen wird.

Sie können sich die Situation folgendermaßen vorstellen:



Hier ist $\gamma' = \gamma_j \cup \gamma_k$.

(H 2)

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2(\cos 2t)\mathrm{e}^{it}$. Skizzieren Sie die Spur von γ und berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1}\, \mathrm{d}z.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

(H 3)

Es sei $G := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ die sogenannte längs der negativen reellen Achse "geschlitzte Ebene". Für $w \in G$ deifinieren wir den Logarithmus $\log w$ durch

$$\log w := \int_\gamma \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma : [0, 1] \to G$ mit $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = w$. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig vom Integrationsweg γ ist, und dass diese Definition mit Kapitel II Definition 4.1 übereinstimmt.