Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 25./26.11.2008

Analysis III – Funktionentheorie

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Minimumprinzip)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine holomorphe Funktion auf G, die nicht konstant ist.

(a) In $z_0 \in G$ habe $|f|$ ein lokales Minimum. Zeigen Sie, dass dann $f(z_0) = 0$ gilt.

(b) Das Gebiet G sei beschränkt, und f habe eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$. In G habe f keine Nullstellen. Zeigen Sie, dass dann $|\tilde{f}|$ sein Minimum auf dem Rand ∂G annimmt.

(c) *Zusatzaufgabe:* Gewinnen Sie daraus einen neuen Beweis für die Tatsache, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt (vgl. Fundamentalsatz der Algebra, Kapitel II, Satz 2.8).

(G 2) (Komplexer Logarithmus)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist f ein Zweig des Logarithmus auf G, dann ist f holomorph und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$.

(b) Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus genau dann, wenn $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf G besitzt.

(G 3) (Lemma von Schwarz)

Beweisen Sie das Lemma von Schwarz (Kapitel II, Satz 3.12):
Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Dann gilt

1. $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$ und
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Ferner gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $|f'(0)| = 1$ und genau dann, wenn $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt.

Hausübungen

(H 1) (Holomorphe Fortsetzung / Reell-analytische Funktionen)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass f holomorph fortsetzbar ist, d.h. dass es ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und ein holomorphes $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F|_I = f$ gibt.

(b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, so dass die Funktion

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

eine holomorphe Fortsetzung auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ hat?

(H 2)

(a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 0$ (das Produkt $f \cdot g$ sei also konstant 0). Zeigen Sie, dass dann $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$ gelten muss.

(b) Geben Sie zwei verschiedene holomorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ und eine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise verschiedener komplexer Zahlen so an, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Widerspricht dies dem Idenditätssatz (Kapitel II, Satz 3.7)?

(H 3) (Komplexer Logarithmus / Wurzel)

Geben Sie ein möglichst großes Gebiet an, auf dem man $z \mapsto \sqrt{\log z}$ definieren kann.