Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 11./12.11.2008

Analysis III – Funktionentheorie

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

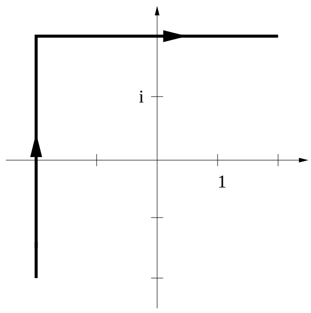
(a) Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z, \quad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{i}(t^3 - t^7)\cos(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\pi} - (t-1)^5 + (\pi - 1)t,\ t \in [0,1].$$

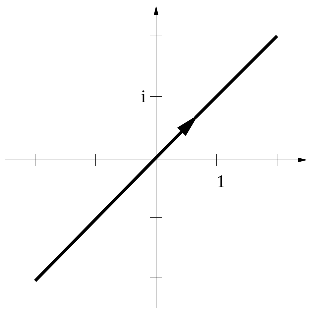
(b) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1 - \mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 1, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi,$$

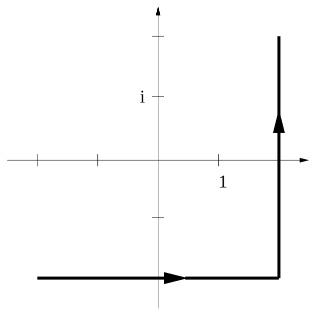
wobei die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durch



γ_1

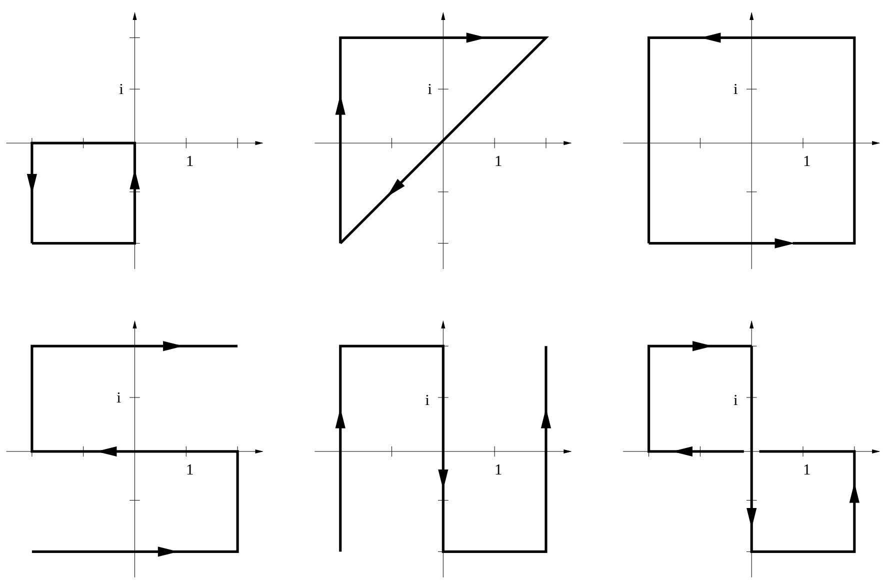


γ_2



γ_3

gegeben sind. Bestimmen Sie die Kurvenintegrale von f entlang der folgenden Wege:



(G 2)

Es sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|a| \neq 1$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(x) + a^2}\,\mathrm{d}x$$

existiert und berechnen Sie es.

Hinweis: Integrieren Sie $(z-a)^{-1}(z-a^{-1})^{-1}$ über die Einheitskreislinie.

(G 3)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ habe keine Nullstelle in G. Zeigen Sie, dass dann f einen *holomorphen Logarithmus* hat, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{e}^g = f$.

Hausübungen

(H 1) (Ein Nullstellenkriterium)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ und $r > 0$ seien so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ gilt. Weiter sei $f \in \mathcal{H}(D)$.

(a) Zeigen Sie in dieser Situation folgende Verschärfung von Korollar 2.6 der Vorlesung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

(b) Zeigen Sie: Gilt

$$|f(z_0)| < \min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\},$$

so besitzt f eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

(H 2)

Es sei $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, so dass die Potenzreihe $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ den Konvergenzradius 1 hat und eine im Inneren des Konvergenzkreises holomorphe Funktion darstellt. Weiter sei $0 < r < 1$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

Bemerkung: Wir werden noch sehen, dass die Voraussetzung an f, holomorph zu sein, unnötig ist, da jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph ist.

(H 3)

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq |z|^n$, so ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > n$.